EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 8

Tous les exercices seront corriges.

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le mercredi de la semaine suivante. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme d'un fichier pdf unique (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien moodle de la semaine relative a cette la serie.

Autour du Thm Noyau-Image

Exercice 1. Soit K un corps. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application lineaire definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x + y) \end{array}$$

(ici on notera $2, 3, \cdots$ pour $2_K = 2.1_K,\ 3_k = 3.1_K, \cdots$)

1. Montrer avec un minimum de calculs que $\ker(\varphi) = \{0_2\}$ et $\mathrm{Im}(\varphi) = K^2$.

Exercice 2. Soit $\varphi : K^2 \mapsto K^2$ l'application lineaire definie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} K^2 & \mapsto & K^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + 3y, x + 4y) \end{array}$$

(ici on notera $2, 3, \cdots$ pour $2_K = 2.1_K,\ 3_k = 3.1_K, \cdots$)

1. Trouver avec un minimum de calculs les dimensions de $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$ (en fonction de la caracteristique de K).
2. Donner (encore avec le minimum de calculs) une base du noyau et de l'image de φ.

Exercice 3. Soit K un corps de caracteristique 0, $V = K^5$ et

$$W = \{(a, b, c, d, e) \in V,\ a + b = c + d,\ a + 2c = 0, 2c + b + 4d = 0\}.$$

1. Montrer que W est un SEV de K^5 en montrant que W est le noyau d'une application lineaire convenable.
2. Calculer $\dim W$ (eventuellement en utilisant le Thm Noyau-Image).
3. Donner une base de W.

Exercice 4. ($\star$) Soient $X, Y \subset V$ des SEVs d'un EV de dimension finie et $X+Y \subset V$ leur somme (qui est un SEV de V). On rappelle que X et Y sont en somme directe si $X \cap Y = \{0_V\}$ et on ecrit cela $X \oplus Y$; dans cet exercice on considere le cas ou X et Y ne sont pas forcement en somme directe.

1. Montrer que $\dim X + \dim Y = \dim(X+Y) + \dim(X \cap Y)$. On pourra appliquer le Thm Noyau-Image a l'application lineaire
$$\bullet + \bullet : \begin{array}{ccc} X \times Y & \mapsto & V \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}.$$
2. On suppose que $\dim X + \dim Y = \dim V$. Montrer que les proprietes suivantes sont equivalentes
   (a) $X \cap Y = \{0_V\}$,
   (b) $X + Y = V$,
   (c) $X \oplus Y = V$.

Exercice 5. Soit V un K-EV de dimension d. Un endomorphisme $\pi : V \mapsto V$ est appele projecteur si π verifie (dans $\mathrm{End}(V)$)
$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi.$$

1. Montrer que si π est un projecteur $\ker \pi \cap \mathrm{Im}\, \pi = \{0_V\}$.
2. Montrer (sans calcul) que $V = \ker \pi \oplus \mathrm{Im}\, \pi$.
3. Soit $v \in V$. Que vaut $\pi(v - \pi(v))$? En deduire une decomposition explicite d'un vecteur $v \in V$ sous la forme
$$v = v_0 + v_1 \text{ avec } v_0 \in \ker \pi,\ v_1 \in \mathrm{Im}\, \pi.$$
4. Montrer que
$$\mathrm{Im}\, \pi = \ker(\mathrm{Id}_V - \pi).$$
5. Soit $\psi \in \mathrm{End}(V)$ une application lineaire qui commute avec π ($\pi \circ \psi = \psi \circ \pi$). Montrer que
$$\psi(\ker \pi) \subset \ker(\pi),\ \psi(\mathrm{Im}\, \pi) \subset \mathrm{Im}(\pi).$$
Ainsi les restrictions $\psi_{|\ker \pi}$ et et $\psi_{|\mathrm{Im}\, \pi}$ definissent des elements de $\mathrm{End}(\ker \pi)$ et de $\mathrm{End}(\mathrm{Im}\, \pi)$.

6. Soit
$$\mathrm{Com}(\pi)=\{\psi\in \mathrm{End}(V),\ \psi\circ\pi=\pi\circ\psi\}\subset \mathrm{End}(V)$$
l'ensemble des endomorphismes de V qui commutent avec π.
Montrer que $\mathrm{Com}(\pi)$ est un sev et un sous-anneau de $\mathrm{End}(V)$ (ie. une sous-K-algebre) et que l'application
$$\psi\in \mathrm{Com}(\pi)\to(\psi_{|\ker\pi},\psi_{|\operatorname{Im}\pi})\in \mathrm{End}(\ker\pi)\times \mathrm{End}(\operatorname{Im}\pi)$$
est un isomorphisme de K-evs.
En deduire $\dim(\mathrm{Com}(\pi))$ en fonction de d et du rang $r=\dim(\operatorname{Im}\pi)$.

Espace vectoriel quotient

Exercice 6. Soit V un K-EV et $N\subset V$ un SEV. On va definir la notion d'espace vectoriel quotient V/N. La relation sur $(v,v')\in V\times V$ donnee par
$$v\sim_K v' \Longleftrightarrow v\equiv v' \,(\mathrm{mod}\, N)\Longleftrightarrow v-v'\in N$$
est une relation d'equivalence dont l'ensemble des classes d'equivalences est donnee par le sous-ensemble de $\mathscr{P}(V)$
$$V/N=\{v\,(\mathrm{mod}\,N):=v+N, v\in V\}.$$
On muni alors l'espace quotient V/N d'une structure de groupe (commutatif) en posant
$$v\,(\mathrm{mod}\,N)+_{V/N}v'\,(\mathrm{mod}\,N):=v+v'\,(\mathrm{mod}\,N)$$
$$0_{V/N}:=0\,(\mathrm{mod}\,N)=N,\quad -(v\,(\mathrm{mod}\,N)):=-v+N;$$
on verifie (comme pour le cas du quotient d'un anneau commutatif par un ideal) que ces operations ne dependent pas des choix des vecteurs v et v' dans les classes de congruence $v\,(\mathrm{mod}\,N)$ et $v'\,(\mathrm{mod}\,N)$.

1. Montrer que la multiplication externe
$$\bullet.\bullet:\begin{array}{ccc} K\times V/N & \mapsto & V/N\\ (\lambda,v\,(\mathrm{mod}\,N)) & \mapsto & \lambda.v\,(\mathrm{mod}\,N):=\lambda.v+N\end{array}$$
est bien definie (ne depend pas du choix de v representant la classe d'equivalence $v+N$) et donne au groupe quotient V/N une structure de K-EV.

2. Montrer que l'application (de reduction modulo N)

$$\bullet \pmod N : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & V/N \\ v & \mapsto & v \pmod N \end{array}$$

   est lineaire, surjective et de noyau egal a

$$\ker(\bullet \pmod N) = N.$$

3. Montrer que si V est de dimension finie il en est de meme de V/N et que

$$\dim V/N = \dim V - \dim N.$$

4. Soit $\varphi : V \mapsto W$ une application lineaire et $N := \ker \varphi$. Montrer que si $v' \in v \pmod N$ alors

$$\varphi(v') = \varphi(v).$$

   En deduire que si on pose pour toute classe $v \pmod N$

$$\varphi_N(v \pmod N) := \varphi(v),$$

   on obtient une application bien definie

$$\varphi_N : V/N \mapsto W.$$

   Montrer que cette application est lineaire pour la structure de K-EV sur V/N definie precedemment et verifie

$$\varphi = \varphi_N \circ (\bullet \pmod N))$$

5. Montrer que $\varphi_N : V/N \mapsto W$ est injective et defini un isomorphisme du K-EV V/N sur son image $\varphi(V) \subset W$.

Remarque 0.1. Etant donne une application lineaire $\varphi : V \mapsto W$ le fait que l'on aie un isomorphisme

$$\overline{\varphi} : V/N \simeq \varphi(V)$$

(qui est valable que V soit de dimension finie ou pas) est la version plus precise du Thm. Noyau-Image (qui dit que $\dim(V/N) = \dim \varphi(V)$ mais sans fournir d'isomorphisme explicite entre les deux espaces).

Dualite

Exercice 7 (bi-dual)**.** Soit V un K-EV de dimension finie d, $V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K)$ son dual et

$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$$

le bi-dual de V (le dual du dual V^* de V).

1. Montrer (sans calculs) que V et V^{**} sont isomorphes. On va donner une isomorphisme explicite et canonique.
2. Pour $v \in V$, on considere l'application "evaluation au point v" qui a une forme lineaire $\ell : V \mapsto K$ associe sa valeur au vecteur v :
$$\mathrm{eval}_v : \ell \mapsto \mathrm{eval}_v(\ell) := \ell(v) \in K.$$
Montrer que eval_v est lineaire (sur V^*) et definit donc un element de V^{**}.
3. On considere alors l'application :
$$\mathrm{eval}_\bullet : \begin{array}{ccc} V & \mapsto & V^{**} \\ v & \mapsto & \mathrm{eval}_v \end{array}.$$
Montrer que $\mathrm{eval}_\bullet$ est lineaire et injective. En deduire que c'est un isomorphisme de V vers V^{**}.
4. Soit $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ une base de V, $\mathscr{B}^* = \{\mathbf{e}_i^*,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ la base duale et
$$\mathscr{B}^{**} = \{\mathbf{e}_i^{**},\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$$
de la base duale de $\mathscr{B}^*$ (la bi-duale) : c'est a dire l'unique famille de forme lineaires sur V^* verifiant
$$\mathbf{e}_i^{**}(\mathbf{e}_j^*) = \delta_{ij}.$$
Montrer que l'image de $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_i,\ 1 \leqslant i \leqslant d\}$ par l'isomorphisme $\mathrm{eval}_\bullet$ est precisement la biduale $\mathscr{B}^{**}$.

Encore un corps (pour les aficionad.a.o.s)

Exercice 8. Pour $p = 2$, tout element de $\mathbb{F}_2$ est un carre, et l'exercice 9 de la serie precedente ne permet donc pas de construire de corps fini a 4 elements. Voici une variante.

1. Pour $K = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le corps a deux elements, reprendre l'exercice 9 de la serie 7 avec la matrice
$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_2)$$
et montrer que $\mathbb{F}_2[I]$ un anneau commutatif.
2. En utilisant le fait (le montrer) que l'equation $u^2 + u = 1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{F}_2$ montrer que $\mathbb{F}_2[I]$ est un corps de cardinal 4. On le note $\mathbb{F}_4$.