EPFL Automne 2024

Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 4

Vous etes fortement encourages a essayer de resoudre (eventuellement a plusieurs) l'exercice ($\star$) et a rendre votre solution (eventuellement a plusieurs) avant le vendredi de la semaine suivante celle ou la serie a ete postee. Il faudra transmettre votre solution sur moodle, sous forme de fichier pdf (eventuellement tape en LaTeX) en suivant le lien a cet effet dans la semaine de la serie.

Exercice 1 (Se reporter a la Section 2.2.1 du cours)**.** Soit $n \geqslant 1$ un entier non-nul et

$$\mathfrak{S}_n = \mathrm{Bij}(\{1, 2, \cdots, n\})$$

le groupe des bijections de l'ensemble $\{1, 2, \cdots, n\}$ (ou groupe des permutations de $\{1, 2, \cdots, n\}$). C'est un groupe fini de $n! = 1.2.\cdots.n$ elements.

On peut representer une permutation par un tableau a deux lignes et n colonnes

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'identite est ainsi codee par

$$\mathrm{Id}_X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix},$$

alors que

$$c_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

est la permutation (dite cylique) qui envoie

$$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto 3, \cdots, n \mapsto n-1,\ n \mapsto 1$$

1. Representer tous les elements de $\mathfrak{S}_2$ et montrer que ce groupe est commutatif.
2. Representer ainsi tous les elements de $\mathfrak{S}_3$ et montrer que ce groupe n'est pas commutatif.
3. Pour $n = 4$, on considere

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

les permutations qui envoient respectivement

$$\theta : 1 \mapsto 4,\ 2 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2,\ \tau : 1 \mapsto 1,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 2.$$

Calculer

$$\theta \circ \tau, \tau \circ \theta,\ \theta^2,\ \theta^3,\ \theta^n,\ \tau^n \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

4. On note

$$\mathfrak{S}_{4,3} = \{\sigma \in \mathfrak{S}_4,\ \sigma(3) = 3\}$$

l'ensemble des bijection qui envoient 3 sur 3 ; on appelle cet ensemble le stabilisateur de 3. Donner tous les elements de $\mathfrak{S}_{4,3}$. Montrer que $\mathfrak{S}_{4,3}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_4$. Est ce que ce groupe est engendre par θ et τ ?

Sous-groupes

Exercice 2. (Le centre d'un groupe) Soit $(G, .)$ un groupe et

$$Z(G) = \{z \in G,\ \text{pour tout } g \in G,\ z.g = g.z\}.$$

Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe commutatif de G. On l'appelle le centre de G.

Exercice 3. Soit X un ensemble et $\mathfrak{S}_X = \mathrm{Bij}(X, X)$ son groupe symetrique (equipe de la composition des bijections).

1. Soit $x_0 \in X$. Montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{S}_{X,x_0} := \{\sigma \in \mathfrak{S}_X,\ \sigma(x_0) = x_0\}$$

est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_X$. On l'appelle le stabilisateur de x_0 and $\mathfrak{S}_X$.

Groupes engendres par un ensemble

Exercice 4. Demontrer le Lemme ci-dessous que l'on pourra utiliser dans les exercices suivants

Lemme. *Soit $(G, *)$ un groupe et $A \subset G$ un sous-ensemble. On suppose que $\langle A \rangle = G$ (ie. le groupe G est engendre par A). Soit $B \subset G$ un autre sous-ensemble. On a l'implication*

$$A \subset \langle B \rangle \Longrightarrow G = \langle B \rangle$$

(si le sous-groupe engendre par B contient A alors c'est G tout entier).

Exercice 5. Soit le groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On rappelle que tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $q.\mathbb{Z}$ pour $q \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que le groupe engendre par 2 et 3 vaut $\langle 2, 3 \rangle = \mathbb{Z}$. (on montrera que ce sous-groupe contient 1).
2. Meme question pour 3 et 73.
3. Montrer (en utilisant Bezout) que pour $m, n \in \mathbb{Z}$, le sous-groupe de $\mathbb{Z}$ engendre par m et n est
$$\langle m, n \rangle = pgcd(m, n).\mathbb{Z}.$$

Exercice 6. ($\star$) Soit le groupe produit $(\mathbb{Z}^2, +)$ forme des paires d'entiers et equipe de l'addition provenant de $(\mathbb{Z}, +)$:

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y),\ x, y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$

(comme la notation le suggere on utilisera -sauf pour la deuxieme question - la notation additive/multiple : en particulier on notera pour $n \geqslant 1$ un entier

$$n.(x, y) = (x, y) + (x, y) + \cdots + (x, y) \text{ } (n \text{ fois});$$

on a evidemment $n.(x, y) = (nx, ny)$

1. Montrer que le groupe $\mathbb{Z}^2$ est engendre par les elements $(1, 0)$ et $(0, 1)$:
$$\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = \mathbb{Z}^2.$$
2. Soit $(H, \star)$ un autre groupe (note multiplicativement) et $\varphi : \mathbb{Z}^2 \mapsto H$ un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$ on a
$$\varphi((x, y)) = h_1^x \star h_2^y$$
avec $h_1 = \varphi((1, 0)),\ h_2 = \varphi((0, 1))$.
3. Soient $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ deux paires d'entiers. On pose
$$(a, b) \wedge (c, d) := ad - bc.$$
Montrer que si $(a, b) \wedge (c, d) = \pm 1$ alors ces deux elements engendrent $\mathbb{Z}^2$:
$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \mathbb{Z}^2.$$
On pourra commencer par remarquer que
$$\langle (a, b), (c, d) \rangle = \{m.(a, b) + n.(c, d),\ m, n \in \mathbb{Z}\} =: \mathbb{Z}.(a, b) + \mathbb{Z}(c, d),$$
et montrer que
$$(1, 0), (0, 1) \in \langle \{(a, b), (c, d)\} \rangle$$
en resolvant des equations lineaires.

4. Montrer que si $\Delta = ad - bc \neq \pm 1$ alors
$$H := \langle (a,b),(c,d) \rangle \neq \mathbb{Z}^2.$$
Pour cela on pourra comparer les images dans $\mathbb{Z}$ des produits $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ et de $H \times H$ par l'application
$$\bullet \wedge \bullet : ((u,v),(u',v')) \mapsto (u,v) \wedge (u',v') = uv' - u'v.$$

Morphismes

Exercice 7. Soit $(G,.)$ un groupe, $A \subset G$ un sous-ensemble qui engendre G :
$$\langle A \rangle = G.$$

Soient $\varphi, \psi : G \to H$ deux morphismes de groupes.

1. Montrer que si
$$\forall a \in A,\ \varphi(a) = \psi(a)$$
alors
$$\varphi = \psi.$$
ie. un morphisme de groupe est completement determine par ses valeurs sur les elements d'un ensemble generateur de G.

Exercice 8 (Conjugaison)**.** Soit G un groupe et $h \in G$. On pose
$$\mathrm{Ad}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G.$$

1. Montrer que Ad_g est un morphisme de groupes.
2. Montrer que Ad_g est bijectif.

Exercice 9 (Groupe des commutateurs/Groupe derive)**.** Soit $(G,.)$ un groupe. Le commutateur de deux elements $g,h \in G$ est l'element
$$[g,h] = g.h.g^{-1}.h^{-1}.$$
Le groupe *derive* de G ou groupe des commutateurs de G est par definition le sous-groupe engendre par les commutateurs
$$D(G) = [G,G] := \langle \{[g,h],\ g,h \in G\} \rangle.$$

1. Que vaut $D(G)$ si G est commutatif ?

2. Montrer que pour tout $k \in G$, et $g, h \in G$,

$$\mathrm{Ad}_k([g,h]) = [\mathrm{Ad}_k(g), \mathrm{Ad}_k(h)]$$

3. En deduire que $D(G)$ est distingue dans G.
4. Soit Z un groupe commutatif et

$$\varphi : G \mapsto Z$$

   un morphisme de groupes. Montrer que $\varphi_{|D(G)}$ (le morphisme φ restreint au sous-groupe $D(G)$) est le morphisme trivial :

$$\forall c \in D(G),\ \varphi(c) = e_Z$$

   (on commencera par calculer la valeur de φ sur un commutateur).