EPFL Automne 2024
Algebre Lineaire Avancee, MATH-110

Série 14

Pour cette serie il n'y aura pas d'exercice a rendre (fin du semestre).

Sauf mention explicite du contraire, on suppose que le corps de base K est de caracteristique $\neq 2$.

Calculs de determinants

Exercice 1. Calculer les determinants des matrices suivantes (pour a, b, c, λ dans un corps K) : utiliser des operations elementaires pour eventuellement vous ramener a des matrices blocs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-a & 1 \\ -1 & 1 & a & b \\ a & 1 & a & c \\ 1 & 1 & -a & 0 \end{pmatrix}, \ B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. On suppose $K = \mathbb{C}$. On considere les matrices ($a \in \mathbb{C}$)

$$C = C(a) = \begin{pmatrix} 0 & 5+2i & -3i & 2+7i & a \\ 0 & 1 & -i & 1 & 0 \\ i & 7+i & 6i & 3i & -4+i \\ 0 & i & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 2 & 0 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -11 & 13 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 8 & 5 & 0 & 4 \\ 2 & 7 & 4 & 77 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 6 & 12 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par des operations elementaires sur les lignes.
2. Calculer le determinant de C (en fonction de a) par developement de Lagrange le long d'une ligne ou d'une colonne bien choisie.
3. Si la matrice C est inversible pour $a = 1$ calculer son inverse.
4. Montrer (sans le calculer) que $\det D \in \mathbb{Z}$.
5. Calculer le determinant de D (de la maniere que vous preferez) et celui de D^3.

6. Soit p un nombre premier. On ecrit D_p pour la matrice D mais vue a coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (on remplace 77 par $77_p = 77.1_{\mathbb{F}_p} = 77 \,(\operatorname{mod} p)$ et pareil pour les autres coordonnees). Montrer que
$$\det D_p = \det D \,(\operatorname{mod} p).$$
7. Pour quelles valeurs de p la matrice D_p est elle de rang 6 ?

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de matrice a coefficients reels $M \in M_3(\mathbb{R})$ verifiant
$$M^{2024} + 2024\mathrm{Id}_3 = \mathbf{0}_{3\times 3}$$
(montrer que le determinant satisfait une equation polynomiale et etudier les solutions possibles d'une telle equation).

Exercice 4. Soient E et F les matrices
$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2a & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & a+5 & 3 \end{pmatrix}, \ F = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\operatorname{cof}(E)$ et $\operatorname{cof}(F)$.
2. Verifier les relations de Cramer
$$E.{}^t\!\operatorname{cof}(E) = \det(E)\mathrm{Id}_3,\ F.{}^t\!\operatorname{cof}(F) = \det(F)\mathrm{Id}_3.$$
3. Si E ou F est inversible, calculer leur inverse.
4. Calculer le polynome caracteristique de F et verifier le Theoreme de Cayley-Hamilton dans ce cas particulier.

Exercice 5. Soit $M = (m_{ij})_{ij\leqslant d} \in M_d(\mathbb{C})$ une matrice a coefficients complexes. On pose $\overline{M}(\overline{m}_{ij})_{ij\leqslant d}$ la matrice obtenue an prenant le conjugue complexe de tous les coordonnees de M.

1. Montrer que $\det(\overline{M}) = \overline{\det(M)}$.
2. Montrer que $\det(M.\overline{M}) \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.
3. Montrer par un exemple que l'on a pas toujours $M.\overline{M} \in M_d(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $P_{car,\overline{M}}(X) = \overline{P_{car,M}}(X)$ ou pour un polynome $P(X) \in \mathbb{C}[X]$, on a note $\overline{P}(X)$ le polynome dont les coefficients sont les conjugues complexes des coefficients de P.
5. Montrer que le polynome produit $P_{car,M}(X).P_{car,\overline{M}}(X) \in \mathbb{R}[X]$ (on utilisera le fait que si $x \in \mathbb{C}$ alors
$$x \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \overline{x} = x.$$

Quelques groupes de matrices interessants

Exercice 6. Soit K un corps. Une matrice $M \in M_d(K)$ est dite orthogonale si elle verifie

$$M.{}^tM = \mathrm{Id}_d.$$

On note $O_d(K)$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1. Montrer que $\det M = \pm 1_K$.
2. Montrer que $\mathrm{O}_d(K) \subset \mathrm{GL}_d(K)$ et que $O_d(K)$ est un sous-groupe de $GL_d(K)$ (le groupe orthogonal).
3. Soit $\mathrm{SO}_d(K) = \{M \in \mathrm{O}_d(K),\ \det M = 1\}$. Montrer que $\mathrm{SO}_d(K)$ est un sous-groupe distingue de $\mathrm{O}_d(K)$.
4. On suppose que $\mathrm{car} K \neq 2$ (de sorte que $1_K \neq -1_K$). Montrer qu'il existe M^- une matrice orthogonale de determinant -1 (on cherchera M sous forme diagonale).
5. Montrer que
$$\mathrm{O}_d(K) = \mathrm{SO}_d(K) \sqcup M^-.\mathrm{SO}_d(K).$$

Exercice 7. Soit $M, M' \in M_d(K)$ des matrice triangulaires superieure par blocs carres :

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in M_{d_1}(K),\ M_2 \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

$$M' = \begin{pmatrix} M_1' & \star \\ \mathbf{0} & M_2' \end{pmatrix},\ M_1' \in M_{d_1}(K),\ M_2' \in M_{d_2}(K),\ d_1 + d_2 = d.$$

1. Montrer que
$$M.M' = \begin{pmatrix} M_1.M_1' & \star \\ \mathbf{0} & M_2.M_2' \end{pmatrix}$$
Les termes "$\star$" designent des matrices de taille $d_1 \times d_2$ dont les valeurs sont differentes et qu'on ne depend pas de calculer et $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{d_2 \times d_1}$ est la matrice nulle de dimensions $d_2 \times d_1$.
2. Montrer que M est inversible ssi M_1 et M_2 le sont et si c'est le cas donner la forme generale de M^{-1}.
3. Montrer que pour $d = d_1 + d_2$
$$P_{d_1,d_2}(K) = \{M = \begin{pmatrix} M_1 & \star \\ \mathbf{0} & M_2 \end{pmatrix},\ M_1 \in \mathrm{GL}_{d_1}(K),\ M_2 \in \mathrm{GL}_{d_2}(K)\}$$
forme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(K)$. On l'appelle le sous-groupe parabolique de type (d_1, d_2).

4. Soit $P(X) = a_n.X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[X]$ un polynome et
$$P(M) = \mathrm{ev}_M(P) = a_n.M^n + a_{n-1}M^{n-1} + \cdots + a_0\mathrm{Id}_d \in M_d(K)$$
son evaluation en la matrice M. Montrer que
$$P(M) = \begin{pmatrix} P(M_1) & \star \\ \mathbf{0} & P(M_2) \end{pmatrix}.$$
5. Soit V un K-ev de dimension d et $\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_d\}$ une base de V. On pose pour $1 \leqslant d_1 < d$
$$V_1 = \mathrm{Vect}(\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{d_1}) = K\mathbf{e}_1 + \cdots + K\mathbf{e}_{d_1}.$$
On note $\mathrm{GL}(V) = \mathrm{Aut}(V)$ le groupe des automorphismes de V.
Montrer que
$$\{\varphi \in \mathrm{GL}(V),\ \varphi(V_1) \subset V_1\} \subset \mathrm{GL}(V)$$
est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.
6. Montrer que pour $\varphi \in \mathrm{GL}(V)$
$$\varphi(V_1) \subset V_1 \Longleftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) \in P_{d_1,d_2}(K)$$
et en deduire une autre preuve que $P_{d_1,d_2}(K)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(K)$.

Autour de Cayley-Hamilton

Le retour de la matrice compagnon

Exercice 8. Soit un polynome unitaire de degre d,
$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in K[X].$$
On note $\mathrm{b} = (b_0, \cdots, b_{d-1}) \in K^d$ le vecteur de ses coefficients.

La matrice compagnon de P est la matrice
$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$
On a deja vu en exercice (avec $d = 4$) que la matrice compagnon verifie l'equation polynomiale
$$P(M_P) = M_P^d + b_{d-1}M_P^{d-1} + \cdots + b_0\mathrm{Id}_d = \mathbf{0}_{d\times d}. \tag{8.1}$$

Remarque 0.1. Par exemple pour $K=\mathbb{R}$ la matrice compagnon de X^2+1 est la matrice $I=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ qui sert a definir le corps des nombres complexes et qui verifie

$$I^2+\mathrm{Id}_2=\mathbf{0}_2.$$

On va demontrer (8.1) pour $d\geqslant 1$ general sans utiliser de calcul matriciel.

Soit $\mathscr{B}=\{\mathbf{e}_1,\cdots,\mathbf{e}_d\}$ la base canonique de K^d et

$$\varphi=\varphi_P:K^d\mapsto K^d$$

l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)=M_P$.

1. Montrer que

$$\varphi(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2,\cdots,\varphi(\mathbf{e}_{k-1})=\mathbf{e}_k,\cdots,\varphi(\mathbf{e}_{d-1})=\mathbf{e}_d,$$

   que

$$\varphi^k(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_{k+1},\ k\leqslant d-1$$

   et que

$$\varphi(\mathbf{e}_d)+b_{d-1}\mathbf{e}_d+b_{d-2}\mathbf{e}_{d-1}+\cdots+b_0\mathbf{e}_1=0.$$

2. Montrer que

$$\varphi^d(\mathbf{e}_1)+b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_1)+\cdots+b_1\varphi(\mathbf{e}_1)+b_0\mathbf{e}_1=0$$

   et que pour tout $k\geqslant 2$

$$\varphi^d(\mathbf{e}_k)+b_{d-1}\varphi^{d-1}(\mathbf{e}_k)+\cdots+b_1\varphi(\mathbf{e}_k)+b_0\mathbf{e}_k=0;$$

   pour cela on se rappellera que l'image du morphisme d'evaluation en φ

$$K[\varphi]=\{P(\varphi),\ P\in K[X]\}=\mathrm{ev}_\varphi(K[X])\subset\mathrm{End}_K(K^d)$$

   est un sous-anneau commutatif de $\mathrm{End}_K(K^d)$ et que pour $Q,R\in K[X]$ des polynomes on a

$$Q(\varphi)\circ R(\varphi)=R(\varphi)\circ Q(\varphi).$$

3. Montrer que

$$\varphi^d+b_{d-1}\varphi^{d-1}+\cdots+b_1\varphi+b_0\mathrm{Id}_{K^d}=0$$

   et (8.1).

Exercice 9. Soit

$$P_{car,M_P}(X)=\det(X.\mathrm{Id}_d-M_P)\in K[X]$$

le polynome caracteristique de la matrice compagnon.

1. Montrer que

$$P_{car,M_P}(X) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0.$$

   Pour cela calculer

$$\det(X.\mathrm{Id}_d - M_P) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

   En echelonnant la matrice $X.\mathrm{Id}_d - M_P$ par une suite d'operations de type (III) (dans le corps $K(X)$ des fractions rationelles a coefficients dans K) (Cf. Exo 8 Serie 11).

2. Redemontrer cette egalite en developant le determinant par rapport a la derniere colonne.

3. Retrouver le fait que M_P est inversible ssi $b_0 = 0$ et montrer qu'alors

$$M_P^{-1} = Q(M_P)$$

   avec

$$Q(X) = (-b_0^{-1})(X^{d-1} + b_{d-1}X^{d-2} + \cdots + b_1) \in K[X].$$

Remarque. On a montre que le polynome caracteristique $P_{car,M_P}(X)$ de la matrice compagnon M_P est precisement $P(X)$. D'autre part par (8.1), on a alors

$$P_{car,M_P}(M_P) = P(M_P) = \mathbf{0}_{d\times d}.$$

En d'autre termes, on a demontre le Theoreme Cayley-Hamilton (*pour tout matrice M on a $P_{car,M}(M) = \mathbf{0}_{d\times d}$*) dans le cas particulier des matrices compagnon.

Dans ce cours, la preuve que nous proposons du Theoreme Cayley-Hamilton consiste precisement a nous ramener au cas des matrices compagnons (il y a d'autres preuves utilisant la formule de Cramer).