


Exo 4 Exam 22-23:

On veut mg $SL_2(K)$ et engendrer par
le $C_{ij, \mu} = Id + \mu E_{ij} \quad i, j \in \{1, 2\} \quad \mu \in K$?

→ Etant donne M on veut mg M
 $\oplus SL_2(K)$

est un produit de $C_{ij,p}$.

Autrement dit si on part de M
et que en multipliant M par des
 $C_{ij,p}$ on arrive à Id_2 on aura
gagné. (Comme pour la preuve que
les matrices de TE sont liées
engendrent $\text{GL}_d(K)$)

On part de M et qu'elle a multiplié par
une $C_{ij, \lambda}$ ops que $c \neq 0$

- Si $c \neq 0$ on peut faire en CL des ligne
pour supposer $a = 1$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1-a}{c} L_2} \begin{pmatrix} 1 & a \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - c L_1} \begin{pmatrix} 1 & b'' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} C_{12, b''} \\ 1 \end{pmatrix}$

Λ multilinéaire

$$\Lambda: (v_1, \dots, v_n) \in V^n \rightarrow \Lambda(v_1, \dots, v_n) \in K$$

Λ est linéaire en chaque x_i $i=1, \dots$

$$\Lambda(\lambda v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_d) = \lambda \Lambda(v_1, v_2, \dots, v_d) + \Lambda(v'_1, v_2, \dots, v_d)$$

pareil en remplaçant

$$(\lambda v_1 + v'_1, v_2, \dots, v_d) \text{ par } (v_1, \lambda v_2 + v'_2, v_3, \dots, v_d)$$

pour tout les v_i pour $i=3, \dots, d$.

Λ est alternée si quand on échange deux des variable $(v_1, \dots, v_d)$ par exemple on se replace.

$$(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d) \text{ par } (v_3, v_2, v_1, \dots, v_d)$$

on obtient

$$\Lambda(v_3, v_2, v_1, v_4, \dots, v_d) = -\Lambda(v_1, v_2, v_3, \dots, v_d)$$

plus généralement si $\sigma \in \mathcal{G}_{\{1, \dots, d\}}$

$$\begin{aligned} \Lambda(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(d)}) \\ = \text{sign}(\sigma) \Lambda(v_1, \dots, v_d). \end{aligned}$$

Cas de 2 variables:

$$\Lambda: (v_1, v_2) \longrightarrow \Lambda(v_1, v_2) \text{ bilineaire}$$

par symétrisation on fabrique une
forme alternée

$$\Lambda_{\text{sign}}(v_1, v_2) = \Lambda(v_1, v_2) - \Lambda(v_2, v_1)$$

Λ_{sign} est bilinéaire alternée

$$\begin{aligned}\Lambda_{\text{sign}}(v_2, v_1) &= \Lambda(v_2, v_1) - \Lambda(v_1, v_2) \\ &= -(\Lambda(v_1, v_2) - \Lambda(v_2, v_1)) = \end{aligned}$$

$$= -\Lambda_{\text{sign}}(v_1, v_2)$$

$$-\Lambda_1(v_1, v_2) := \Lambda(v_1, v_2) + \Lambda(v_2, v_1)$$

Λ_1 est bilin symétrique:

$$\Lambda_1(v_2, v_1) = \Lambda(v_2, v_1) + \Lambda(v_1, v_2)$$

$$= \Lambda(v_1, v_2) + \Lambda(v_2, v_1) = \Lambda_1(v_1, v_2)$$

Pour fabriquer une forme alt ou sym
en n variable

$$\Lambda_{\text{sign}}(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \Lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

= et alternée :

$$\text{si } \tau \in \mathcal{G}_n \quad \Lambda_{\text{sign}}(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(n)}) = \text{sign}(\tau) \cdot \Lambda(v_1, \dots, v_n)$$

fait de la somme sur σ le changement
 $\tau \circ \sigma \longleftrightarrow \sigma' \longleftrightarrow \sigma = \tau^{-1} \circ \sigma'$

$$\Lambda_1(v_1, \dots, v_n) = \sum_{\sigma \in G_n} \frac{1}{n!} \Lambda(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$$

= est symétrique.

$P_{\text{car}, \varphi}$ ou $P_{\text{car}, M}$ est un invariant
de φ ou de M

qui sert à étudier les propriétés de
 φ ou M .

P_{car} fournit un ensemble de d ($d = \dim V$
scalaires qui $d = \dim M$)

servent à étudier φ ou M

$$P_{\text{car}, \varphi} = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_1X + a_0$$
$$a_0, \dots, a_{d-1} \in K$$

Cette donnée contient $\det \varphi$ ou $\det M$

$$P_{\text{car}, \varphi} = \det (X \cdot \text{Id}_V - \varphi)$$

$$\text{en } X=0 \quad P_{\text{car}, \varphi}(0) = \det(-\varphi) = (-1)^d \det \varphi$$

Si λ vérifie P_{car} , $\varphi(\lambda) = 0_K$

alors il existe $v \in \underline{V - \{0\}}$ tq

$\varphi(v) = \lambda \cdot v$ λ est valeur propre de φ

v est vecteur propre

$$\text{Si } P_{\text{car}, \varphi}(\lambda) = 0 \rightarrow$$

$$\det(\lambda \text{Id} - \varphi) = 0$$

$\lambda \text{Id} - \varphi$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow$

$$\ker(\lambda \text{Id} - \varphi) \neq \{0\} \Leftrightarrow \exists v \in V - \{0\}$$

$$\lambda v - \varphi(v) = 0_v$$

$$\Leftrightarrow \varphi(v) = \lambda v.$$

Cayley-Hamilton:

$$P_{\text{char}, \varphi}(\varphi) = \underline{0}_V \in \text{End}(V)$$

$$\varphi^d + a_{d-1} \varphi^{d-1} + \dots + a_1 \varphi + a_0 \text{Id}_V = \underline{0}_V$$