

THE
MATRIX



Le Thm de Cayley-Hamilton

Rappel: $K[X]$ = l'anneau de polynome a
coefs dans K et si

$\varphi \in \text{End}(V)$ $\dim V = d \geq 1$ ou bien

$M \in M_d(K)$ on peut evaluer un

polynome $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$

en φ ou en M en posant

$$P(\varphi) = a_n \varphi^n + a_{n-1} \varphi^{n-1} + \dots + a_0 \varphi^0 \in \text{End}(V)$$

$\parallel$
 $a_0 \text{Id}_V$

$$P(M) = a_n M^n + a_{n-1} M^{n-1} + \dots + a_0 \text{Id}_d \in M_d(K)$$

On define 2 applications

$$\text{ev}_\varphi: P(X) \in K[X] \longrightarrow P(\varphi) \in \text{End}(V)$$

$$\text{ev}_N: P(X) \in K[X] \longrightarrow P(N) \in M_d(K)$$

les applications ev_φ et ev_N sont K -linéaires
 et des morphismes d'anneaux
 (ie des morphismes de K -algèbres)

$$\text{Cad: } \forall P, Q \in K[x] \quad \lambda \in K$$

$$(\lambda P + Q)(\varphi) = \lambda P(\varphi) + Q(\varphi)$$

$$(P \cdot Q)(\varphi) = P(\varphi) \circ Q(\varphi) =$$

$$(Q \cdot P)(\varphi) = Q(\varphi) \circ P(\varphi)$$

Comme $K[x]$ est commutatif son image
par $\text{ev } \varphi$ est un anneau commutatif

pareil pour ev_M .

On observe que comme $K[X]$ est un K -ev de dim infini les applications ev_ϕ et ev_M ne sont jamais injectives (car $End(V)$ et $M_d(K)$ sont de dim finie)

et plus précisément: si on note

$K[X]_{\leq d^2}$ l'ev des polynomes de d^2

$$\leq d^2: P(X) = a_{d^2} X^{d^2} + a_{d^2-1} X^{d^2-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$K[X]_{\leq d^2}$ et de $\dim d^2 + 1 > d^2 = \dim \text{End}(V)$
 $\dim \Pi_d(K)$

et

$$\text{ev}_\varphi: P \in K[x]_{\leq d^2} \longrightarrow P(\varphi) \in \text{End}(V)$$

$$\text{ev}_M: P \in K[x]_{\leq d^2} \longrightarrow P(M) \in M_d(V)$$

on a pour le Thm NI:

$$\dim \text{Im } \text{ev}_\varphi + \dim \ker(\text{ev}_\varphi) = d^2 + 1$$

$$\dim \ker(\text{ev}_\varphi) \geq 1$$

- il existe $P \in \ker(\text{ev}_\varphi) \cap K[X]_{\leq d^2}$

$$\text{tq } P(\varphi) = O_V \quad P \neq 0.$$

- il existe $P \in K[X]_{\leq d^2} - \{0\}$ tq

$$P(M) = O_{d \times d}.$$

Un tel polynome est appelé polynome annulateur
de φ ou M .

THÉORÈME 11.6 (Cayley-Hamilton). Soit $\varphi \in \text{End}(V)$ (resp. $M \in M_d(K)$) alors son polynôme caractéristique $P_{\text{car},\varphi}(X)$ (resp. $P_{\text{car},M}(X)$) appartient à $\ker \text{ev}_\varphi$ (resp. $\ker \text{ev}_M$); en d'autres termes

$$P_{\text{car},\varphi}(\varphi) = \underline{0}_V, \quad P_{\text{car},M}(M) = \underline{0}_{d \times d}.$$

Rmq: Améliore grandement la majoration
d° Pol annulateur $\leq d^2$ générale ↗

(l'argument précédent est valable en
replaçant $\text{End}(V)$ et $M_d(K)$ par une
 K -algèbre A de $\dim d' < \infty$.

Rmq: Dans des cas particuliers on peut faire mieux que $\deg = d$.

Ex: $\varphi = \underline{0}_V$: X est annulateur de $\underline{0}_V$

$\varphi = \text{Id}_V$ $X-1$ est annulateur de Id_V .

Mais "pour presque tout" λ ou $\varphi \in P_{\text{car}}, \varphi$ est de d^0 le + petit possible.

Preuve: Soit $\varphi \in \text{End}(V)$ on veut m q

$$P_{\text{car}, \varphi}(\varphi) = \underline{0}_V$$

$$\begin{aligned} P_{\text{car}, \varphi}(X) &= \det(X \text{Id}_V - \varphi) \\ &= \det(X \text{Id}_V - M) \end{aligned}$$

ou $M = \text{mat}_B(\varphi)$ $B = \text{base de } V$.

On veut mp: $\forall v \in V$

$$P_{\text{con}, \varphi}(\varphi)(v) = 0_v ?$$

Si $v = 0_v$ on a fini.

Sinon on considère la suite de
vecteurs

$$\{v = \varphi^0(v), \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^n(v), \dots \geq 1\}$$

Comme V est de dim finie $= d$ il existe un d_1 tq la famille

$$\{v, \varphi(v), \varphi^2(v), \dots, \varphi^{d_1}(v)\} \text{ est liée}$$

($d_1 \leq d$). Prenons d_1 le plus petit

possible: $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d_1-1}(v)\}$ est libre
et $\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d_1-1}(v), \varphi^{d_1}(v)\}$ est
lié: $d_1 \geq 1$.

Soit $V_1 = \text{Vect}\{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d_1-1}(v)\}$
 $\dim V_1 = d_1$

et $\varphi^{d_1}(v)$ est CL des vecteurs précédents
: comme $\{v, \dots, \varphi^{d_1}(v)\}$ est liée il existe

$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{d_1} \in K$ non tous nuls

$$\lambda_0 v + \lambda_1 \varphi(v) + \dots + \lambda_{d_1-1} \varphi^{d_1-1}(v) + \lambda_{d_1} \varphi^{d_1}(v) = 0_v$$

et si $\lambda_{d_1} = 0$ alors comme $\{v, \dots, \varphi^{d_1-1}(v)\}$
est libre $\Rightarrow \lambda_0 = \dots = \lambda_{d_1-1} = 0$

$$\lambda_d \neq 0 \Rightarrow$$

$$\varphi^{d_1}(v) + \frac{\lambda_{d_1-1}}{\lambda_{d_1}} \varphi^{d_1-1}(v) + \dots + \frac{\lambda_0}{\lambda_{d_1}} v = 0$$

∴ exist $b_0, \dots, b_{d_1-1} \in K$ s.t.

$$\varphi^{d_1}(v) = b_0 v + b_1 \varphi(v) + \dots + b_{d_1-1} \varphi^{d_1-1}(v).$$

Soit $B_1 = \{v, \varphi(v), \dots, \varphi^{d_1-1}(v)\}$ est libre
ou la complète en une base de V

$B = B_1 \sqcup B_2$ avec B_2 libre de
 $d - d_1$ vecteurs.

Soit $M = \text{mat}_B(\varphi)$
 $P_{\text{car}, \varphi} = P_{\text{car}, M}$

on regarde la décomposition de
 B des vecteurs

$$\varphi(v), \varphi(\varphi(v)), \varphi(\varphi^2(v)), \dots, \varphi(\varphi^{d_1-1}(v))$$

$$\varphi(v'_1), \dots, \varphi(v'_{d_2}) \quad d_2 = d - d_1$$

$$\{v'_1, \dots, v'_{d_2}\} = B_2.$$

On a que

$$\varphi(v) = 1 \cdot \varphi(v), \quad \varphi(\varphi(v)) = \varphi^2(v) = 1 \cdot \varphi^2(v)$$

$$\dots \quad \varphi(\varphi^{d_1-1}(v)) = \varphi^{d_1}(v) = b_0 v + \dots + b_{d_1-1} \varphi^{d_1-1}(v)$$

On a pas besoin des décomposition
des autres vecteurs $\varphi(v'_1) \dots \varphi(v'_{d_2})$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & * \\ 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_{d_1-1} & * \\ & & \mathbf{0} & & & M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & & * \\ & & & & * \\ & M_1 & & & * \\ & & & & * \\ & & & & * \\ & & \mathbf{0} & & * \\ & & & & M_2 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\varphi^{d_1}(v)) = \varphi^{d_1}(v)$$

$$\mathbb{M}^{\parallel}$$

$$\begin{aligned}
 P_{\text{cor}, \varphi}(X) &= P_{\text{cor}, M}(X) = P_{\text{cor}, M_1}(X) P_{\text{cor}, M_2}(X) \\
 &= P_{\text{cor}, M_2}(X) P_{\text{cor}, M_1}(X)
 \end{aligned}$$

Reste a calcular

$$P_{\text{cor}, M_1}(X)$$

Par la Prop 11.1 et en ajustant les notations ($d \leftrightarrow d_1$ $b_i \leftrightarrow -b_i$)

$$P_{\text{cor}, H_1}(X) = X^{d_1} - b_{d_1-1} X^{d_1-1} - \dots - b_0$$

on a alors

$$P_{\text{cor}, \varphi}(\varphi)(v) = P_{\text{cor}, H_2}(\varphi) \circ P_{\text{cor}, H_1}(\varphi)(v)$$

$$= P_{\text{cor}, N_2}(\varphi) \left(\underbrace{P_{\text{cor}, N_1}(\varphi)(v)} \right)$$

$$P_{\text{cor}, N_1}(\varphi)(v) = (\varphi^{d_1} L_{b_{d_{n-1}}} \varphi^{d_{n-1}} - \dots - b_0 I_d) / (v)$$

$$= \varphi^{d_n}(v) - b_{d_{n-1}} \varphi^{d_{n-1}}(v) - \dots - b_0 v$$

$$= 0_v$$

$$P_{\text{cor}, \varphi}(\varphi)(v) = P_{\text{cor}, N_2}(\varphi)(0_v) = 0_v \quad \square$$

PROPOSITION 11.1. *Soit*

$$P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0 \in K[X]$$

un polynome et

$$M_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -b_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -b_{d-1} \end{pmatrix} \in M_d(K).$$

la matrice compagnon associée au polynome P . Alors son polynome caractéristique est égal à P :

$$P_{car, M_P}(X) = \det(X \cdot \text{Id}_d - M_P) = P(X) = X^d + b_{d-1}X^{d-1} + \cdots + b_0.$$

Preuve: développement de Lagrange.

$$\det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ -1 & X & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & X & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & X + b_{d-1} \end{pmatrix}$$

Developper le long de la dernière colonne

$$\det(XI_d - M_p) = \sum_{i=0}^{d-2} b_i (-1)^{d+i+1} \Pi(i+1|d) \\ + (X + b_{d-1}) (-1)^{d+d-1+1} \Pi(d|d)$$

$\Pi(i+1, d)$ est la matrice formée à partir de $XI_d - M_p$ après avoir ôté la d -ième colonne et la $i+1$ ième ligne

la matrice $M^{(d+1) \times (d+1)}(i+1, d)$ est triangulaire
 supérieure avec $i X$'s et $d-1-i (-1)$'s
 le long de la diagonale

$$\det M(i+1, d) = X^i (-1)^{d-1-i}$$

$$\det(X \text{Id}_d - M) = \sum_{i=0}^{d-1} b_i (-1)^{d+i+1+d-1-i} X^i + (b_d + X) X^{d-1} = P(X) \quad \square$$

Corollaire de CH:

Corollaire 1: Soit $K[\varphi] \subset \text{End}(V)$ ou
 $K[M] \subset M_d(K)$ l'image de

$K[x]$ par l'application ev_φ ou ev_M

Ce sont des K -algèbres commutatives
de dimension $\leq d$.

Preuve: $\varphi \in \text{End}(V)$

$$K[\varphi] = \{ P(\varphi) \mid P \in K[x] \}$$

Soit $P(x) \in K[x]$ par division euclidienne

$$P(x) = Q(x)P_{\text{car}, \varphi}(x) + R(x)$$

avec $\deg R(x) < \deg P_{\text{car}, \varphi}(x) = d$

en évaluant en φ

$$P(\varphi) = Q(\varphi)P_{\text{can}, \varphi}(\varphi) + R(\varphi) \\ = R(\varphi)$$

$$K[\varphi] = K[\varphi]_{\leq d-1} \text{ avec } K[x]_{\leq d-1} = \text{Poly} \\ \text{de } d^0 \leq d-1$$

$$K[x]_{\leq d-1} \text{ et de dim } d.$$

et $K[\varphi]_{\leq d-1}$ et de $\dim \leq d$.



Cor 2: soit $\varphi \in \text{End}(V)$ ou $M \in M_d(K)$

Si $\det \varphi \neq 0$ ou si $\det M \neq 0$ alors
 φ et M sont inversibles et il existe

$a_1, \dots, a_{d-1} \in K$ tq

$$\varphi^{-1} = \frac{(-1)^{d+1}}{\det \varphi} (a_1 \text{Id}_V + a_2 \varphi + \dots + a_{d-1} \varphi^{d-1})$$

$$M^{-1} = \frac{(-1)^{d+1}}{\det M} (a_1 \text{Id}_d + a_2 M + \dots + a_{d-1} M^{d-1})$$

et en particulier $\varphi^{-1} \in K[\varphi], \varphi^{-1} \in K[M]$

Preuve: par CH

$$P_{\text{car}, \varphi}(\varphi) = 0_V = \varphi^d + a_{d-1} \varphi^{d-1} + \dots + a_1 \varphi$$

$$\text{et on sait } a_0 = (-1)^d \det \varphi + a_0 \text{Id}_V$$

$$\begin{aligned} \text{Id}_V (-1)^d \det \varphi &= -a_1 \varphi - a_2 \varphi^2 - \dots - \varphi^d \\ &= -\varphi (a_1 \text{Id}_V + a_2 \varphi + \dots + \varphi^{d-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Id}_V = \varphi \times \frac{(-1)^{d+1}}{\det \varphi} (a_1 \text{Id}_V + a_2 \varphi + \dots + \varphi^{d-1})$$

φ est inversible et $\varphi^{-1} =$

$$\frac{(-1)^{d+1}}{\det \varphi} (a_1 \text{Id}_V + a_2 \varphi + \dots + \varphi^{d-1}) \quad \square$$