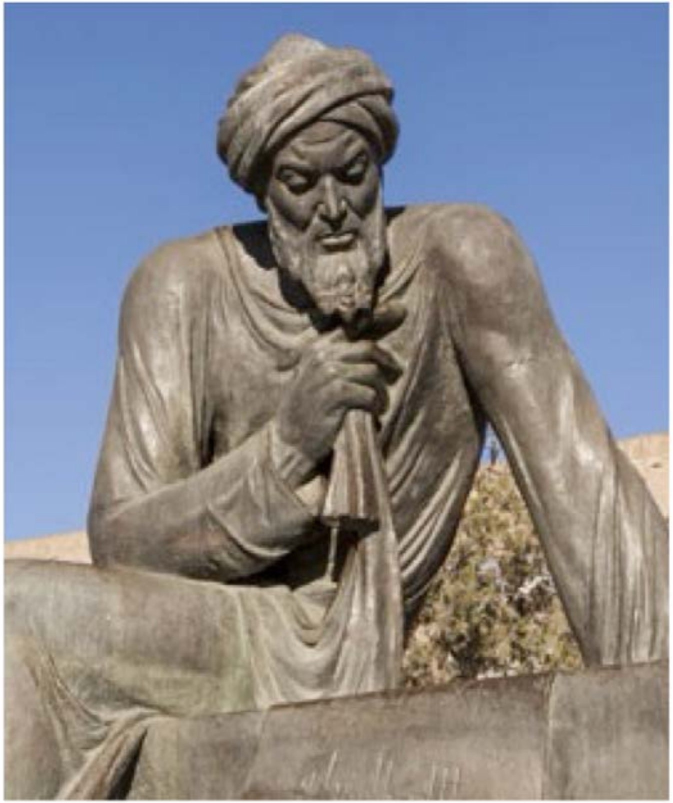
Math 110 : Algebre Lineaire Avancee



Al-Khwarizmi

Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala

Abrege du calcul par la restauration et la comparaison.

$$2(l+1) = 81 + 1 = 82$$

$$l + 1 = 41 \quad (-1)$$

$$l = 41 - 1 = 40$$

Prologue

La Théorie des Ensembles

Langage

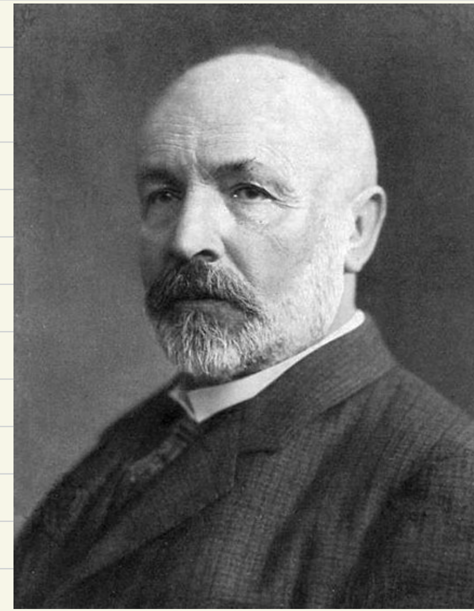
THE WARNING

Paradoxe de Russell

L'ensemble de tous les ensembles n'est pas un ensemble.

- Si c'est le cas on pourrait considerer l'ensemble des ensemble qui ne se contiennent pas eux-même...

Z F (C)



“Le langage est un ensemble de citations.”

Axiomes de la Théorie

$$Z \quad F \quad (C)$$

Logique des Prédicats du 1er Ordre

Un langage avec un alphabet et une grammaire

- **Alphabet** : un ensemble de symboles pour designer des variables, constantes predicats, formules, des fonctions.

Quantifications logiques

$\forall$ quelque soit (pour tout)

- $\forall x \in E \quad P(x)$: pour tout x ds E la propriété $P(x)$ est vraie.

- $\exists$ (il existe)

$\exists x \in E \quad P(x)$: il existe un elt x de E tq $P(x)$ est vraie

$|$ "tel que"

- $\exists x \ P(x)$ ou bien $\exists x \ | P(x)$

- $\exists !$ il existe un unique

- égalité : $=$

Connecteurs logiques

- $\wedge$ "et"
- $\vee$ "ou"

$\neg$ négation
contraposée

$\Longrightarrow$ "implique"

$\Longleftrightarrow$ "équivalent à" "si et seulement si"

ssi

- Règles de syntaxe pour former des phrases correctes.

- Système déductif qui permet de passer d'un énoncé "correct" à un autre énoncé "correct"

Relation d'Appartenance

La categorie des ensembles c'est une collection d'objet "les ensemble" qui sont liés entre eux par des relation d'appartenance : a, A ensemble

"a appartient à A"

$$a \in A$$

- relation d'inclusion

A et B des ensembles

on dit qui A est inclus ds B

B contient A

$A \subset B$

si tout element de A est aussi un element de B

$\forall a \in A \quad a \in B$

On dit que A est un sous-ensemble
une partie
de B.

Axiomes de la Théorie des Ensembles

Ensemble vide

Il existe un ensemble qui ne contient aucun element et qui est contenu inclus dans tous ensemble.

On l'appelle ensemble vide

$\emptyset$. $\forall E \quad E \notin \emptyset \wedge \emptyset \subset E$

Axiome de x2 inclusion

Deux ensembles sont egaux ssi ils ont les même elements

A, B Ensembles

$$A = B \iff \overbrace{\forall a \in A \Rightarrow a \in B}^{A \subset B} \text{ et } \underbrace{\forall b \in B \Rightarrow b \in A}_{B \subset A}$$

L'ensemble des parties

A un Ensemble, il existe un ensemble $\mathcal{P}(A)$ dont les elements sont les sous-ensembles de A.

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subset A \}$$

Ex: $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ $\quad A \in \mathcal{P}(A)$

si $A = \emptyset$ $\quad \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$$A = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$$

Axiome de la Reunion

Soit E un ensemble, il existe un ensemble $\bigcup\limits_{E}$ "la reunion de E" dont les elements sont les elements de tous ~~les sous-ensembles~~ elements de E.

Exo: $\bigcup\limits_{\emptyset} = ?$

Axiome de la paire

Soient A et B des ensembles, il existe un ensemble dont les elements sont A et B on le note $\{A, B\}$

Rmq : si $A = B$ $\{A, A\} = \{A\}$ le singleton "A"

$$A \in \{A\}$$

+ d'autres axiomes ZF

+ Axiome du Choix C.

Réunion d'ensembles

A B des ensemble on construit la paire $\{A,B\}$

on lui applique l'axiome de la Réunion

$$\bigcup_{\{A,B\}} = A \cup B$$

= l'ensemble dont les elts sont les elts de A et les éléments de B.

Rmq : si $A = B$

$\bigcup \{A\}$ = l'ensemble dont les elts sont les elts de A

= A.

si I est un ensemble et

$(A_i)_{i \in I}$ est la donnée pour chaque élément $i \in I$ d'un ensemble A_i

(Collection d'ensembles d'indices dans I) indexés par I

on peut former $\bigcup_{i \in I} A_i$ = l'ensemble dont les éléments sont les éléments de A_i pour i variant ds I.

Intersection

- $A \cap B = \{ e \mid e \in A \wedge e \in B \}$

$A \cap B \subset A \quad A \cap B \subset B$

- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{ e \mid \forall i \in I \; e \in A_i \}$

Construction de $\mathbb{N}$

- $\emptyset =: 0$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} =: 1 \ni 0$

Paire - $\{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} =: 2 \ni 1 \ni 0$
- $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}$
- $4 = \{\emptyset, 1, 2, 3\}, \ldots$
- $n+1 = \bigcup_{\{n, \{n\}\}} = \{0, 1, \ldots, n-1, \{0, 1, \ldots, n-1\}\}$

$\vdots$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ Axiome de l'Infini

Soient $m, n \in \mathbb{N}$ on défini la relation

$$m \leq n \iff m \subset n$$

$0 \leq 1$ car $\phi \subset \{\emptyset\}$

$1 \leq 2$ car $1 = \{\phi\} \subset \{\phi, \{\phi\}\} = 2$

$\rightsquigarrow \mathbb{Z} = \{ , -2, -1, 0, 1, 2 \}$

$\rightsquigarrow \mathbb{Q} = \{ \frac{p}{q} \; p, q \in \mathbb{Z} \; q \neq 0 \}$

$\rightsquigarrow \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{C}.$

<u>Def</u>: Soit $n \in \mathbb{N}$, le successeur de n noté $\mathrm{succ}(n)$ ou $n+1$ est l'entier formé en répétant la procédure :
si $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a

$$n+1 = \bigcup \{n, \{n\}\} = \{0, 1, \dots, n-1, \{0, 1, \dots, n-1\}\}.$$

Principe du Raisonnement par recurrence

<u>Proposition</u> : soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un ensemble tel que $0 \in \mathcal{N}$ et tel que $\forall n \in \mathcal{N} \Rightarrow n+1 = \bigcup \{n, \{n\}\} \in \mathcal{N}$ alors $\mathcal{N} = \mathbb{N}$.

Produit Cartesien A, B des Ens

$$A \times B = \{(a,b) \quad a \in A \quad b \in B\}$$

$$(a,b) \neq \{a,b\} \text{ car } \{a,b\} = \{b,a\}$$

alors que $(a,b) \neq (b,a)$ sauf si $a = b$.

$$(a,b) := \{a, \{a,b\}\} \quad a \in A \quad b \in B$$

__Def :__ le produit cartesien de A et B est

$$A \times B = \{ \{a, \{a,b\}\} \quad a \in A , b \in B \}$$

__Rmq__ si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$ alors

$$A \times B = \emptyset = \emptyset \times B = A \times \emptyset$$

Si $A = B$ $\quad A \times A \doteq A^2$

Iteration : n ensembles $A_1, \dots, A_n$

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \; a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n\}$$

Produits Cartesiens infinis.

On se donne une collection d'ensembles

$(A_i)_{i\in I}$ I l'ensemble des index de la collection

pour $i\in I$ A_i est un ensemble

On veut définir

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ (a_i)_{i\in I} \ \forall i\in I \ a_i \in A_i \right\}$$

Pour produire un element de $\prod_{i \in I} A_i$

on doit, pour chaque $i \in I$

"choisir" un $a_i \in A_i$.

C'est possible si I est fini

si $I = \mathbb{N}$ ← axiome de l'infini

en general cela necessite <u>l'axiome du choix</u>.

Relations Binaires

Déf : Soient A, B des Ens. Une relation entre (les elts de A et B) A et B est un sous ensemble

$$R \subset A \times B = \{(a,b) \quad a \in A \ b \in B\}$$

Si $(a,b) \in R$ on dit que a et b sont liés par la relation $R \rightarrow aRb$

ou $a \sim_R b$

Exemple: $A = B = \mathbb{N} = \{0, 1, \dots \}$

Relation d'ordre

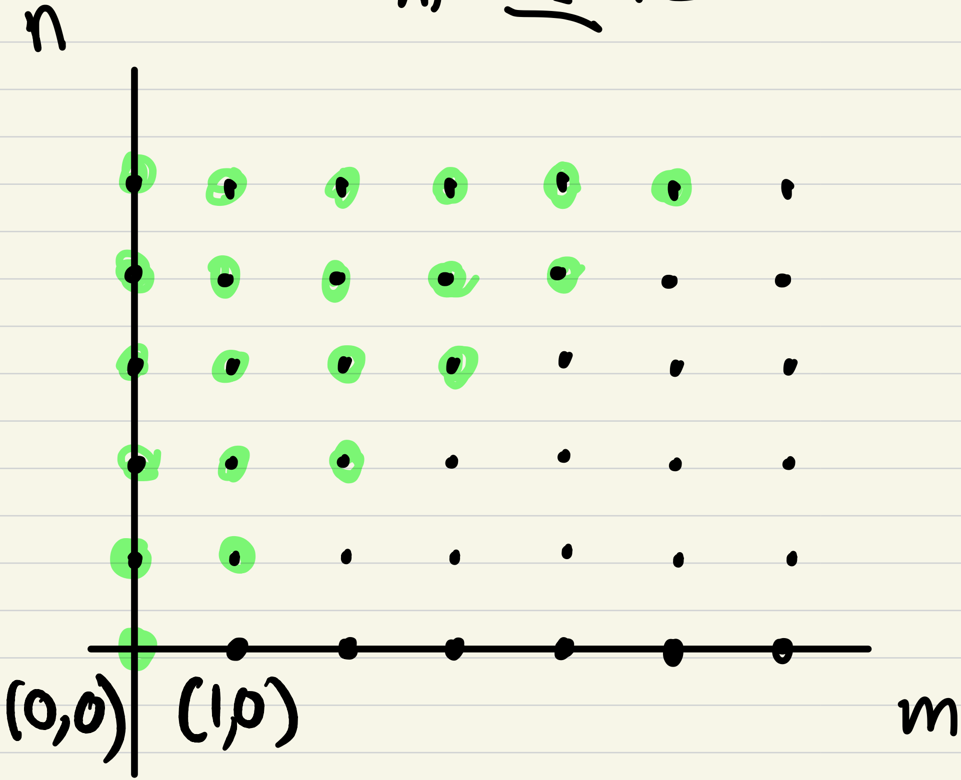
$R_{\leq} = \{ (m, n) \quad m, n \in \mathbb{N} \quad m \leq n \}$

Relation de divisibilite

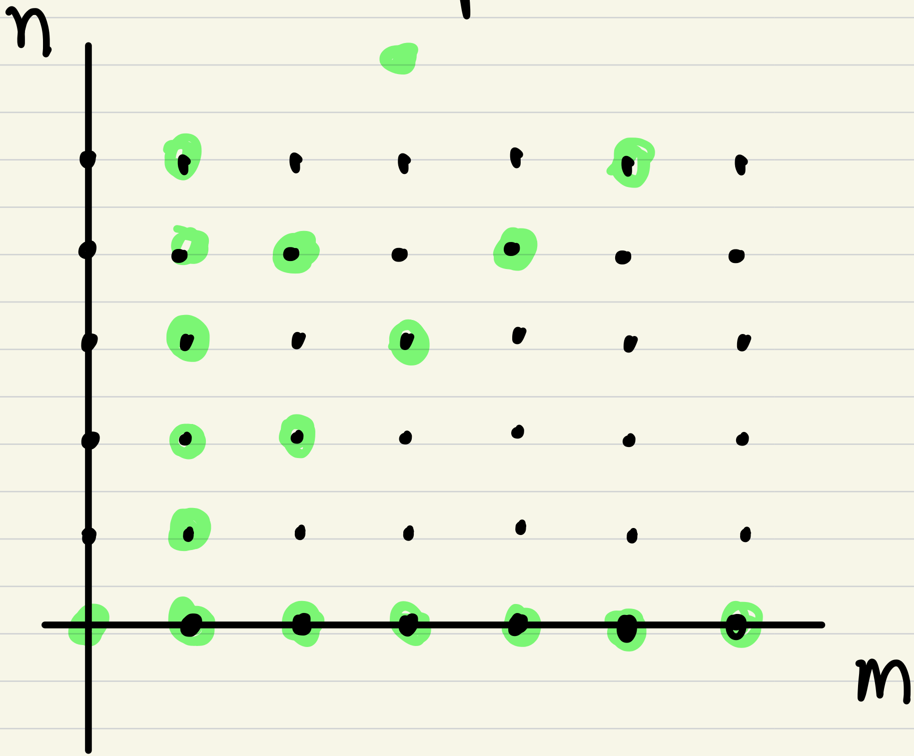
$R_{|} = \{ (m, n) \quad m, n \in \mathbb{N} \text{ tq } m | n \}$

Rappel: on dit que m divise n si il existe $k \in \mathbb{N}$ tq
$m | n$ $\qquad$ $n = km$

$m \leq n$



$m \mid n$



Divers types de Relations si $B = A$

Une relation $R \subset A \times A$ est :

Reflexive : si $\forall a \in A \quad aRa$

Symetrique : si $\forall a, a' \in A \quad aRa' \Longrightarrow a'Ra$

Antisymetrique : $\forall a, a' \in A$

si aRa' et $a'Ra \implies a = a'$

Transitive : $\forall a, a', a'' \in A$

si aRa' et $a'Ra'' \longrightarrow aRa''$

Relation d'ordre : une relation qui est transitive, reflexive et antisymetrique.

ex : $\leq$, $|$ (pas $<$)

Relations d'equivalence (B=A)

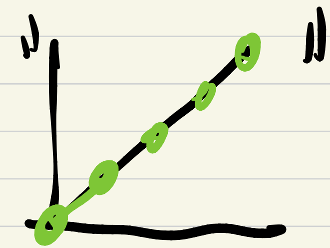
Une relation est d'equivalence si

R est reflexive

symetrique

et transitive.

Ex: Relation être egal " = "



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Relation de congruence modulo q

$q \geq 1$ entier on dit que (m,n) sont congrus modulo q ssi

$q \mid m-n$ (ie. $\exists k \in \mathbb{Z}$ tq $m-n = qk$)

on le note $m \equiv n \, (q)$.

Ex: $q=3$ $\quad 1,4,7$ sont congrus modulo 3

$0,3,6$ ——————

$2,5,8$ ——————

Applications entre ensembles

Def: Soient X et Y des ensembles une application de X vers Y, $f : X \longrightarrow Y$ est la donnée pour chaque $x \in X$ d'un unique element $y \in Y$ qu'on appelle image de x par l'application f et qu'on note $f(x)$

X s'appelle l'ensemble de depart de f

Y ———————————— d'arrivee de f

$f(x)$ l'image de x par f

si $y \in Y$ verifie $f(x) = y$ on dit que

x est un antecedent de y par f.

Exemple : $X = Y = \mathbb{R}$

$f(x) = x$ $\quad f : Id_{\mathbb{R}}$ Identité de $\mathbb{R}$

$f(x) = x^2$ $\quad f = \bullet^2 = (x \to x^2)$

$f(x) = \cos(x)$ $\quad \cos(\bullet)$

X et Y sont de ensemble generaux

Application constante : $y_0 \in Y$

$f = \underline{y_0} : x \in X \longrightarrow y_0 \in Y$

= application constante de valeur y_0

$X = Y$

$$Id_X : x \in X \longrightarrow x \in X$$

Identite de X.

Application de Cantor

$$C : (m,n) \in \mathbb{N}^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\left((m+n)^2 + m + 3n\right) \in \mathbb{N}$$

Graphes : X, Y des Ens

Un graphe est une relation entre X et Y

$$G \subset X \times Y$$ qui a la propriété suivante

$\forall x \in X$ l'ensemble

$$G_x = \{ y \in Y \text{ tq } (x,y) \in G \} \subset Y$$

a exactement un élément.

de manière équivalente on demande que étant donné $x \in X$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}$

$$\{(x,y) \in \mathcal{G} \quad y \in Y\}$$ n'a qu'un élément

A un graphe $\mathcal{G} \subset X \times Y$ on associe une fonction

$f_G : x \in X \longrightarrow$ l'unique element $y \in Y$ tel que $(x,y) \in G$

i.e. l'unique element de $G_x \subset Y$.

Reciproquement a une application

$f : x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$

Reciproquement a une application

$$f : x \in X \longrightarrow f(x) \in Y$$

on associe un graphe

$$\mathcal{G}_f = \{ (x, f(x)) \quad x \in X \}$$

les application entre deux ens X et Y

forment un ensemble :

l'ensemble des graphes entre X et Y

= l'ensemble de sous-ensembles de $X \times Y$

qui sont des graphe

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,Y) \subset \mathcal{P}(X \times Y)$$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y)$

$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,Y)$ = Ensemble des applications entre X et Y

Hom = "homomorphisme"

Appl

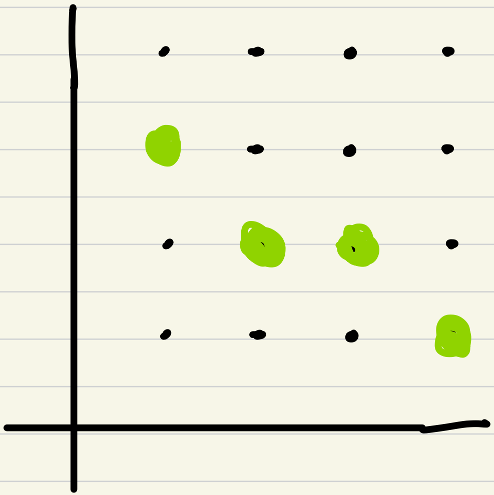
Notation alternatives

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(X,Y) = \mathcal{F}(X,Y)$$
$$= Y^X$$

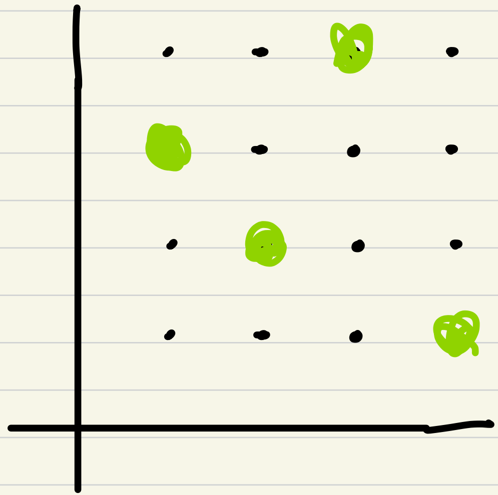
$$\left|\mathcal{F}(\{1,\dots,m\},\{1,\dots,n\})\right| = n^m$$

$X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$

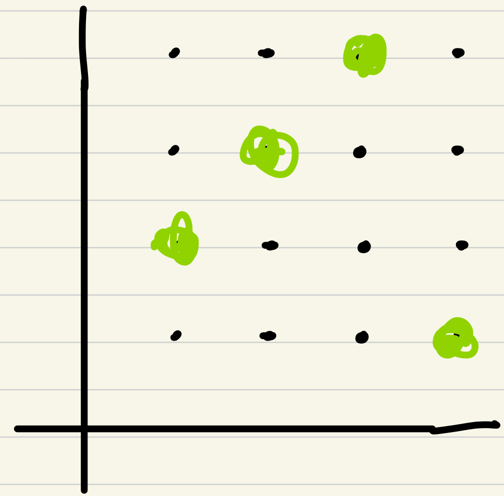
- $f_1 : 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 2,\ 4 \to 1$
- $f_2 : 1 \to 3,\ 2 \to 2,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$
- $f_3 : 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 4,\ 4 \to 1$



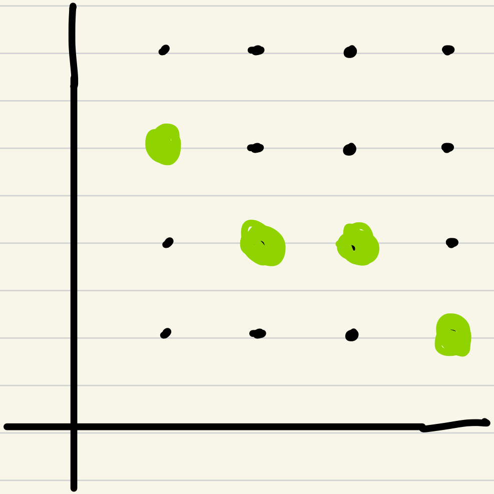
f_1



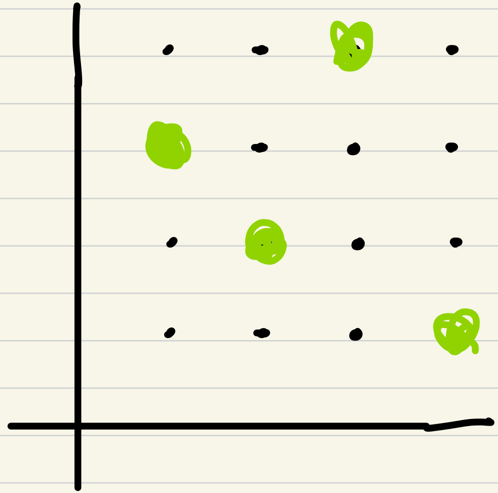
f_2



f_3



f_1



f_2

f_3

$Id_{\{1,2,3,4\}}$

$\underline{2} : 1 \to 2,\ 2 \to 2,\ 3 \to 2,\ 4 \to 2$