| | |
|---|---|
| EPFL – Printemps 2024 | D. Strütt |
| **Analyse II** – CGC SV | **Exercices** |
| Série Révisions | juin 2024 |

**Remarque.**
Ces exercices supplémentaires **ne** représentent **pas** une liste exhaustive des questions qui peuvent être posée en examen. Ils sont donnés comme matériel supplémentaire.

**Exercice 1.**
Donner les solutions des problèmes à valeurs initiales suivants :

(*i*) $y'(t) = \dfrac{t}{1+t^2}(1+y(t))$, $y(1) = 1$

(*ii*) $y'(t) + \dfrac{1}{1+t}y(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, $y(0) = -1$ avec $t > -1$

(*iii*) $y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = e^{-t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

**Exercice 2.**
Dire si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

(*i*) l'ensemble $D$ donné par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\right\}$$

est fermé.

(*ii*) L'ensemble $D$ donné par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } 0 < y < \frac{1}{x}\right\}$$

est borné.

(*iii*) Si $A \in \mathbb{R}^2$ est fermé, alors $\partial A \neq A$.

(*iv*) La suite $x_n$ définie par $x_n = \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ converge.

(*v*) La suite $x_n$ définie par $x_n \left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)$ admet une sous-suite convergente.

**Exercice 3.**
Soit la courbe $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\gamma(t) = (2, \cos(t)).$$

Calculer la longueur de $\gamma$.

**Exercice 4.**
Pour chaque fonction ci-dessous, dire si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe et le cas échéant donner sa valeur.

(*i*) $f(x, y) = \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}$.

(*ii*) $f(x, y) = \dfrac{\tan(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$.

**Exercice 5.** (*i*) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Montrer que $f$ est différentiable en $(0, 0)$.

(*ii*) Soit $f(x,y)=\sin(x)\sin(y)$. Calculer la dérivée directionnelle de $f$ au point $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6})$ en direction du vecteur $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$).

(*iii*) Soit $f(x,y)=x\sin(y)+y\sin(x)$. Donner l'équation du plan tangent au graphe de $f$ au point $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

**Exercice 6.**
Soient $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z)=(xyz^2,x+y+z)$ et $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ tel que $\nabla g(1,3)=(2,-1)$. Soit finalement $h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ donnée comme $h=g\circ f$. Calculer $\frac{\partial h}{\partial z}(1,1,1)$.

**Exercice 7.**
Donner la nature des points stationnaires de la fonction
$$f(x,y)=x^2y-2xy^2-4xy.$$

**Exercice 8.**
Donner le polynôme de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $f(x,y)=(1+\sin(x+y))\cos(x+y)$ autour de $(0,0)$.

**Exercice 9.**
Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y)=(x-2y)e^{x^2+y^2-1}$$
et $(x_0,y_0)=(0,-1)$. L'équation $f(x,y)=2$ définit une fonction $x=g(y)$ telle que $g(y_0)=x_0$ et $f(g(y),y)=2$ dans un voisinage de $y=-1$.
Calculer $g'(y_0)$.

**Exercice 10.**
Soient $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définies par
$$f(x,y)=2x^2+4y^2+3x,\quad g(x,y)=x^2+y^2-4.$$
Donner le minimum et le maximum de $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$.

**Exercice 11.**
Soit $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ 0\le x\le 2y\le 4\}$ et $f\colon E\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y)=x^2+2y^2+xy-3x-5y+4.$$
Trouver $\min_{(x,y)\in E}f(x,y)$ et $\max_{(x,y)\in E}f(x,y)$.

**Exercice 12.**
On donne $F:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par
$$F(t)=\int_t^{\pi t}\frac{\cos(x^2t)}{x}dx.$$
Calculer $F'(t)$.

**Exercice 13.**
Calculer
$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}\int_0^{1-x^2}\frac{18}{5}xe^{\frac{9}{10}y^2-y}dydx$$

**Exercice 14.**
Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x\ge 0,\ 1\le x^2+y^2\le 4\}$. Calculer
$$\iint_D xy^2dxdy$$

**Exercice 15.**
Pour les ensembles $E$ et les fonctions $f$ données ci-dessous, calculer $\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$

(*i*) $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ y\ge 0, z\ge 0,\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\}$ et $f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

(*ii*) $E=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1+\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right\}$ et $f(x,y,z)=1$