L'exercice 1 ci-dessous peut être rendu pendant le cours du lundi semaine 10 (28 avril). Il sera corrigé et rendu le lundi de la semaine 11. Le but du rendu est que vous puissiez confronter votre rédaction à une correction.

Exercice 1 (À rendre)**.**
Cet exercice peut être rendu au cours du lundi 28 avril (entre 10h et 12h.) Il sera corrigé et rendu au cours du lundi 5 mai.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + 2x^3 - x^2y + 2xy^2 - y^3 + y^4}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Déterminez si f est différentiable en $(0,0)$. Justifier.

Exercice 2.
Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |x| < y \leq 1\}$. Montrer que E n'est pas fermé.

Exercice 3.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\left(y\sqrt{x^2+y^2} - x\right) + x^3 + x|y|^5 - y|y|^5}{x^2 + |y|^5} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Déterminez si f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4 (VF)**.**
Vrai ou faux ?

Q1 : Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = a + bx + cy$. Alors, f est de classe C^∞ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) = (b,c)$

Q2 : Soit $f,g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ telles que f est différentiable en (x_0,y_0). Alors, g est différentiable si et seulement si $f+g$ est différentiable.

Q3 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, f est différentiable en (x_0,y_0).

Q4 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, f est différentiable en (x_0,y_0).

Q5 : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon D \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x_0 \in D$ et $v \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|v\| = 1$, la dérivée directionnelle suivant la direction v $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ existe. Supposons de plus que pour tout v comme ci-dessus, la fonction $\frac{\partial f}{\partial v}\colon D \to \mathbb{R}$ est continue. Alors, f est différentiable.

Exercice 5.
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminer si la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existe et le cas échéant, la calculer.

$$(i)\ \ f(x,y)=\frac{1-\cos\left(|x|+y^2\right)}{(|x|+y^2)^2}$$

$$(ii)\ \ f(x,y)=e^{x^2+\sqrt{|y|}}\cos\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{|y|}}\right)$$

$$(iii)\ \ f(x,y)=\frac{\sin(3x-2y^2)-3x-2x^2}{x^2+y^2}$$

$$(iv)\ \ f(x,y)=\frac{\log(1-2x-2y)+2x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$(v)\ \ f(x,y)=\frac{\sin(x^2y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Suggestion : En utilisant la proposition 4.3 (*vii*) et la proposition 4.29, il est possible de résoudre cet exercice sans appliquer le critère des deux gendarmes, tout en restant rigoureux !

Exercice 6.
Soit $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $g(u,v)=(-v,u)$ et $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla f(x,y)=\left(3x^2+y^2,2xy+e^y\right).$$

Soit encore $h=f\circ g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
Calculer $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1)$ et $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1)$

Exercice 7.
Soit $D=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\ :\ u+v\neq 0\}$ et $f\colon D\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(u,v)=\log(u^2+2uv+v^2),$$

et $g\colon\mathbb{R}^2\to D$ une fonction de classe C^1 telle que $g(0,3)=(0,-3)$ et

$$\nabla g(0,3)=\begin{pmatrix}-9 & 0\\ -3 & 3\end{pmatrix}$$

Soit encore $h=f\circ g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
Calculer $\nabla h(0,3)$.

Exercice 8.
Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ ouvert, $f\in C^1(D)$, $(x_0,y_0)\in D$ et $v\in\mathbb{R}^2$ tel que $\|v\|=1$. À l'aide de la formule de dérivation du produit de composition, démontrer la formule

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)=\langle\nabla f(x_0,y_0),v\rangle\,.$$

Exercice 9. (*i*) Soit $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(t)=\int_0^{t^2}e^{te^x}\,dx.$$

Calculer $F'(1)$.

(*ii*) Soit $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$F(t)=\int_{\sin(t)}^{\cos(t)}e^{t^2x^2}\,dx.$$

Calculer $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 3 f n'est pas différentiable. La limite à étudier est $Q(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + |h_2|^5}$

Exercice 4 Q1. VRAI

Q2. VRAI

Q3. FAUX

Q4. FAUX

Q5. VRAI

Exercice 5 (i) $\frac{1}{2}$

(ii) diverge

(iii) -2

(iv) 0

(v) diverge

Exercice 6 $\dfrac{\partial h}{\partial u}(0,1) = 1$, $\dfrac{\partial h}{\partial v}(0,1) = -3$

Exercice 7 $\nabla h(0,3) = (8, -2)$

Exercice 9 (i) $3e^e - e$

(ii) $-\sqrt{2}e^{\frac{\pi^2}{32}}$