EPFL – Printemps 2025	D. Strütt
Analyse II – CGC SV	**Exercices**
Série 8	10 avril 2025

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants dire si ils sont ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? bornés ?

(*i*) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| \leq \sqrt{4-y^2}\}$

(*ii*) $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y^2 - 1 \leq z \leq 0, \ x < 0\}$

(*iii*) $E = \{(x,x,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + z^2 \leq 4\}$

(*iv*) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x < 1, \ y \geq \dfrac{1}{(x^2-1)^2}\right\}$

Exercice 2.
Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < 1, \ z = 0\}$. Montrer que E n'est pas ouvert.

Exercice 3.
Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y\left|xy^3 - \sin(y)\cos(y)\right|$$

Déterminez si f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4.
Pour les fonctions $f \colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et les directions $v \in \mathbb{R}^2$ telles ques $\|v\| = 1$ données ci-dessous, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0)$ en utilisant la formule du théorème 4.14.

(*i*) $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \log(x^2+y)$, $(x_0,y_0) = (2,1)$, et $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

(*ii*) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (1+x)y^2$, $(x_0,y_0) = (0,1)$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(*iii*) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{x^2-y}$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $v = \left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$

Exercice 5 (Interprétation géométrique du gradient)**.**
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \colon D \to \mathbb{R}$ et $\tilde{x} \in D$ tel que f est différentiable en $\tilde{x}$ et $\nabla f(x) \neq 0$. Le but de cet exercice est de montrer que $\nabla f(x)$ est un vecteur qui pointe dans la direction où f croît le plus rapidement.

(*i*) Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|v\| = 1$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (Proposition 2.2 (*xiii*)) que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x)\right| \leq \|\nabla f(x)\|.$$

(*ii*) Soit

$$v = \frac{1}{\|\nabla f(x)\|}\nabla f(x).$$

Alors, $v \in \mathbb{R}^n$ et $\|v\| = 1$. Montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \|\nabla f(x)\|.$$

En d'autres termes, la plus grande dérivée directionnelle de f en x est celle où le vecteur v pointe dans la même direction que le gradient. Couplé à l'interprétation géométrique de la dérivée directionnelle (`https://www.geogebra.org/calculator/yp5kt7uj`) on a l'interprétation géométrique du gradient voulue.

Exercice 6 (Limites de fonctions dans $\mathbb{R}^3$)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = \frac{zx\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}.$$

Montrer que la limite $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)$ existe et donner sa valeur.
Marche-à-suivre :

1. *Test des directions* : On passe en coordonnées sphériques :

   $$(x,y,z) = (r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi)$$

   où $r \geq 0$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\varphi \in [0,\pi]$.

   (Pour visualiser : https://www.geogebra.org/calculator/fw7um4tb vous pouvez jouer avec les variables phi et theta pour voir les directions que ces angles représentent.)

   Calculer

   $$\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi).$$

   Si cette limite dépend de θ ou φ, la limite n'existe pas. Si elle ne dépend ni de θ ni de φ, essayer d'appliquer le critère.

2. *Critère* :

   Trouver une fonction $\psi(r)$ qui ne dépend ni de θ ni de φ telle que

   $$\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0 \quad \text{et} \quad |f(r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\varphi) - l| \leq \psi(r).$$

Exercice 7.
Pour les fonctions $f\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et les points $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ donnés ci-dessous, donner l'équation du plan tangent au graphe de f en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.

(i) $f(x,y) = x - y - x^2 + y^3$, $(x_0,y_0) = (-2,1)$.

(ii) $f(x,y) = 5 - x^2 - \sin(xy)$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

(iii) $f(x,y) = \tan(x^2+y)$, $(x_0,y_0) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, 0\right)$.

Exercice 8.
Donner le polynôme de Taylor d'ordre 2 des fonctions ci-dessous autour de (x_0,y_0).

(i) $f(x,y) = \sin(3+3y+xy+y^2)$, $(x_0,y_0) = (1,-1)$

(ii) $f(x,y) = e^{3+2x+x^2+y}$, $(x_0,y_0) = (-1,-2)$.

(iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{3-x-2y-xy}$, $(x_0,y_0) = (2,0)$.

(iv) $f(x,y) = \log(x+x^2y)$, $(x_0,y_0) = (1,0)$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (*i*) Fermé, borné

(*ii*) Ni Ouvert, ni fermé, non-borné

(*iii*) Fermé, borné.

Exercice 3 f est différentiable.

Exercice 4 (*i*) $\frac{16}{25}$

(*ii*) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

(*iii*) $-\frac{2}{13}$

Exercice 6 0

Exercice 7 (*i*) $z - 5x - 2y - 2 = 0$

(*ii*) $z + 2x + y - 6 = 0$

(*iii*) $z - 2\sqrt{\pi}x - 2y + \pi - 1 = 0$

Exercice 8 (*i*) $-(x-1) + 2(y+1) + (x-1)(y+1) + (y+1)^2$

(*ii*) $1 + (y+2) + (x+1)^2 + \frac{1}{2}(y+2)^2$

(*iii*) $1 + (x-2) + 4y + (x-2)^2 + 9(x-2)y + 16y^2$

(*iv*) $(x-1) + y - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)y - \frac{1}{2}y^2$