EPFL – Printemps 2025	D. Strütt
Analyse II – CGC SV	**Exercices**
Série 7	3 avril 2025

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants dire si ils sont ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? bornés ?

(*i*) $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{1}{2} \le y \le \cos(x)\right\}$

(*ii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 > 1 \text{ et } x^2 - 4 < y < 2\}$

(*iii*) $E = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x, y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2.
Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \le x < 1 - y^2\}$. Montrer que E n'est pas ouvert.

Exercice 3 (techniques avancées pour le calcul de limite)**.**
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, déterminez si la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe. Si oui, calculer la limite et utiliser un critère du cours. Si non, justifier.

(*i*) $f(x, y) = \dfrac{\log(1 + x) - x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

(*ii*) $f(x, y) = \dfrac{\log(1 + x^4 y^2)}{x^6 + y^6}$

(*iii*) $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos(x^2 y)}{x^4 + y^8}$

(*iv*) $f(x, y) = \dfrac{e^{xy^2} - 1}{x^2 + y^4}$

(*v*) $f(x, y) = \dfrac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2}$

Suggestion : Utilisez les techniques avancées décrites dans le polycopié § 3.4 (`https://sma.epfl.ch/~struett/analyse2/main_proofs_at_the_end.pdf#section.3.4`)

Exercice 4 (Limite ailleurs qu'en $(0, 0)$)**.**
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 1)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{(x + 1)(y - 1)^2 + x^2}{x^2 + (y - 1)^2}$$

La limite $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y)$ existe-t-elle ? Si oui, donner sa valeur.

Exercice 5.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y}{2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(*i*) Montrer que f est continue en $(0, 0)$.

(*ii*) Montrer que pour tout $\tilde{y} \neq 0$, f n'est pas continue en $(0, \tilde{y})$.

Suggestion : Utiliser la caractérisation des limites de fonctions par les suites.

Exercice 6.
Pour les fonctions suivantes, calculer leur gradient.

(i) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 e^{xy} - y$.

(ii) $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$.

(iii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+y^2}}$.

Exercice 7.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors,

- ☐ f n'est pas continue et les dérivées partielles de f n'existent pas en $(0,0)$.
- ☐ f est continue en $(0,0)$ mais les dérivées partielles de f n'existent pas en $(0,0)$.
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$, mais les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$.
- ☐ f est continue et les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$.

Exercice 8.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 9.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Déterminez si f est différentiable en $(0,0)$.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (*i*) Fermé, non-borné

(*ii*) Ouvert, borné

(*iii*) Fermé, non-borné

Exercice 3 (*i*) 0

(*ii*) diverge

(*iii*) 0

(*iv*) diverge

(*v*) diverge

Exercice 4 1.

Exercice 6 (*i*) $\nabla f(x,y) = \left(2xe^{xy} + x^2ye^{xy}, x^3e^{xy} - 1\right)$.

(*ii*) $\nabla f(x,y) = \frac{2}{(x^2+y^2)^2} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot (x,y)$

(*iii*) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}, -\frac{y\sqrt{1+x^2}}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$.

Exercice 7 ■ f n'est pas continue en $(0,0)$, mais les dérivées partielles de f existent en $(0,0)$.