EPFL – Printemps 2025	D. Strütt
Analyse II – CGC SV	**Exercices**
Série 6	27 mars 2025

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants, déterminez s'ils sont ouverts ? fermés ? ni l'un ni l'autre ? Bornés ?

(*i*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-1)^2 = 1\}$

(*ii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 < 4\}$

(*iii*) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = -z, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice 2.
Soit $E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x\big\}$. Montrer que E n'est pas ouvert.

Exercice 3.
Calculer la longueur des courbes suivantes :

(*i*) $\gamma\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$.

(*ii*) $\gamma\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$.

(*iii*) $\gamma\colon [1, 2] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\gamma(t) = (3t^2 - 1, -2t + 5, 3t^3 + 5)$

Exercice 4.
Déterminez, parmi les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$ ci-dessous si la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ existe et le cas échéant, la calculer.
Si la limite existe on vérifiera les hypothèse d'un critère du cours, et si la limite n'existe pas, on exhibera une ou plusieurs façon(s) de s'approcher (sous forme de courbe ou de suite) qui montrent que la limite n'existe pas.

(*i*) $f(x, y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

(*ii*) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$

(*iii*) $f(x, y) = \dfrac{x^4 y}{x^4 + y^8}$

(*iv*) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{|x|}y}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$

(*v*) $f(x, y) = \dfrac{x^3 + |xy| + y^3}{x^2 + 9y^2}$

Exercice 5.
Trouver la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

soit continue.

Exercice 6.
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, vérifier que f passe le test des directions en $(0,0)$, i.e. $\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ existe et est indépendante de θ, puis déterminer si la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe.

(i) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^8}{x^6+y^{12}}$

(ii) $f(x,y) = \dfrac{x^4y^2}{x^4+y^8}$

(iii) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^6}{x^6+y^{10}}$

Suggestion : Si vous décidez de montrer que la limite n'existe pas, choisissez une courbe $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ de la forme $\gamma(t) = (t^\alpha, t^\beta)$ de telle sorte qu'après avoir composé avec f, toutes les puissances de t au dénominateur sont les mêmes.

Exercice 7.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ une fonction telle que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ existe. Alors,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Q2 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ une fonction telle que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ existe. Alors, il existe une fonction $\psi(r)$ indépendante de θ telle que $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$ et pour tout $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$,

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - l| \leq \psi(r).$$

Q3 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ une fonction telle que la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l$ existe. Alors, il existe une fonction $\varphi(x)$ indépendante de y telle que $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \varphi(0) = 0$ et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y) - l| \leq \varphi(x).$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) Fermé, borné.

(ii) Ni fermé, ni ouvert, borné.

(iii) Fermé borné.

Exercice 3 (i) 8

(ii) $\sqrt{2}\,(e^{4\pi}-1)$

(iii) 23

Exercice 4 (i) 0

(ii) diverge

(iii) 0

(iv) 0

(v) diverge

Exercice 5 $\alpha = \frac{1}{2}$

Exercice 6 (i) diverge

(ii) 0

(iii) diverge

Exercice 7 1 : FAUX

2 : VRAI

3 : FAUX