Exercice 1.
Parmi les ensemble suivants, déterminez s'ils sont ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? bornés ?

(*i*) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = 0, \ z = \arctan(y)\}$

(*ii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$

(*iii*) $E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\}$

(*iv*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y = \sin(x)\}$

(*v*) $E = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \sin(y)\}$

(*vi*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y < \pi^2, \ y = x^2\}$

(*vii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < \pi^2, \ y = x^2\}$

Exercice 2.
Soit l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ défini par

$$E = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0 \text{ et } y \geq 0\Big\}.$$

Montrer que E n'est ni ouvert, ni fermé.

Exercice 3. (*i*) Soit une suite $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ telle que la suite définie par la première composante de (x_k): $(x_{k,1})_{k\geq 1}$ vérifie :

$$\lim_{k\to\infty} x_{k,1} = +\infty$$

Montrer par l'absurde que (x_k) n'a aucune sous suite convergente.

(*ii*) Donner l'exemple d'une suite dont au moins une des composantes n'est pas bornée mais qui admet une sous-suite convergente.

Exercice 4.
Soit la suite $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^3$ définie par

$$x_k = \left(\cos(k\pi), k\cos\left(\frac{1}{k}\right), \frac{k^2+1}{k^3}\right)$$

Alors :

- ☐ $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = +\infty$.
- ☐ (x_k) diverge, mais admet une sous-suite convergente.
- ☐ (x_k) converge.
- ☐ Toutes les composantes de (x_k) convergent, mais (x_k) diverge.

Exercice 5.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si A et B sont deux ensembles ouverts, $A \cup B$ est ouvert.

Q2 : Si A et B sont deux ensembles ouverts, $A \cap B$ est ouvert.

Q3 : Si A et B sont deux ensembles ouverts, $A \backslash B$ est ouvert.

Q4 : Si A et B sont deux ensembles fermés, $A \cup B$ est fermé.

Q5 : Si A et B sont deux ensembles fermés, $A \cap B$ est fermé.

Q6 : Si A et B sont deux ensembles fermés, $A \backslash B$ est fermé.

Exercice 6.
Vrai ou faux ?

Q1 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente telle que pour tout $k \geq 1$, $x_k \in E$. Alors, $\lim_{k\to\infty} x_k \in E$.

Q2 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ une suite convergente telle que pour tout $k \geq 1$, $x_k \in E$. Alors, $\lim_{k\to\infty} x_k \in E$.

Q3 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble. Alors, $\partial E = \partial\left(\mathbb{R}^n \backslash E\right)$

Q4 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble tel que $\partial E \neq \emptyset$ et $x \in \partial E$. Alors, il existe une suite $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\forall k \geq 1$, $x_k \notin E$ et $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Exercice 7.
Soit la suite $(x_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{R}^2$ définie par $x_k = \Big((-1)^k, (-1)^{k+1}\Big)$.

(i) Existe-t-il une sous-suite de (x_k) qui converge vers $(1,1)$?

(ii) Existe-t-il une sous-suite de (x_k) qui converge vers $(-1,1)$?

(iii) Existe-t-il une sous-suite de (x_k) qui converge vers $(1,-1)$?

(iv) Existe-t-il une sous-suite de (x_k) qui converge vers $(-1,-1)$?

Exercice 8.
Soit la courbe $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = \left(\frac{1}{3}t^3, 3t, \frac{\sqrt{6}}{2}t^2\right)$. Calculer la longueur de la courbe.

Exercice 9. (i) Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$, et $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(t) = a + t(b-a) = ((1-t)a_1 + tb_1, (1-t)a_2 + tb_2)\,.$$

Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Quelle est l'ensemble image de f ?

Calculer la longueur de la courbe. Comparez avec la distance qui sépare a et b.

(ii) Soit la spirale $f\colon [0,6\pi] \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$. Dessiner l'ensemble image de f. Montrer que sa longueur est donnée par

$$\int_0^{6\pi} \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

(pas besoin de calculer l'intégrale.)

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1
- (i) Fermé, non borné.
- (ii) Ouverte et bornée.
- (iii) Ni ouvert, ni fermé, borné.
- (iv) Fermé, non-borné.
- (v) Fermé, non-borné.
- (vi) Ni ouvert, ni fermé, borné.
- (vii) Ni ouvert, ni fermé, non borné.

Exercice 5
- 1 : VRAI
- 2 : VRAI
- 3 : FAUX
- 4 : VRAI
- 5 : VRAI
- 6 : FAUX

Exercice 6
- 1 : FAUX
- 2 : VRAI
- 3 : VRAI
- 4 : VRAI

Exercice 7
- (i) Non
- (ii) Oui
- (iii) Oui
- (iv) Non

Exercice 8 $\frac{20}{3}$

Exercice 9
- (i) $\|b-a\|$