**Exercice 1.**
Pour les équations différentielles suivantes, lister les méthodes vues aux cours qui permettent de les résoudre, puis donner la solution générale.

$(i)$ $y' + \pi y = e^{-\pi x} + \pi x e^x$

$(ii)$ $4y'' - 12y' + 9y = -3\cos\left(\frac{3}{2}x\right)$

$(iii)$ $(x^2+9)y' + xy + xy^2 = 0$

**Rappel** : Les méthodes vues en cours sont :

1.12/1.13 Séparation des variables

1.18 Séparation des variables sur équation homogène+variation de la constante

1.21 Facteur intégrant

1.26/1.28 Séparation des variables sur équation homogène+coefficients indéterminés

1.39 Polynôme caractéristique+variation de la constante

1.45/1.47 Polynôme caractéristique+coefficients indéterminés

**Exercice 2.**
Vrai ou Faux ?

Q1 : Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \cos^2(y) \\ y(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

n'a pas de solution.

Q2 : Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^0(\mathbb{R})$ et $y_1, y_2 \in C^1(\mathbb{R})$ deux solutions de l'EDO

$$y' + ay = f(x).$$

Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \theta y_1(x) + (1-\theta)y_2(x)$ est également une solution de l'EDO.

Q3 : L'équation

$$y' + 2y = xe^{-2x}$$

admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = \alpha_1 x e^{-2x} + \alpha_2 x^2 e^{-2x}$

Q4 : Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et l'EDO

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Si $y_1$ et $y_2$ sont deux solutions différentes de l'EDO, leur Wronskien $W[y_1, y_2]$ ne s'annule jamais.

**Exercice 3.**
Montrer que les boules ouvertes sont ouvertes.

**Exercice 4.**
Pour chaque sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ ci-dessous déterminez s'il est ouvert ? fermé ? les deux ? ni l'un ni l'autre ?

(i) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 + x_2 > 0\}$

(ii) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|x\| \leq \pi\}$

(iii) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0, x_2 \neq 0\}$

(iv) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1 > 0, x_2 \leq 0\}$

(v) $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 0, x_2 \neq x_3\}$

(vi) $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 = 2, x_2 = -2\}$

(vii) $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_3 > 0, \|x\| < 1\}$

**Exercice 5.**
Parmi les ensembles suivants, déterminez s'ils sont ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? et déterminez s'ils sont bornés.

(i) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_2 \leq x_1^2\}$

(ii) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1| < 1 - x_2^2\}$

(iii) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x_1 < 1, x_2 \geq \sqrt{x_1}\}$

(iv) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x_1| < \cos(x_2)\}$

(v) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 \leq 16\}$

(vi) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 1\}$

(vii) $E = \{x \in \mathbb{R}^2 \ : \ -1 < x_1 < 1, x_2 = x_1^3\}$

**Exercice 6** (VF Intérieur, bord, adhérence)**.**
Vrai ou faux ?

Q1 : Si $E$ est un ensemble, $\mathrm{int}\,(\mathrm{int}\,(E)) = \mathrm{int}\,(E)$ et $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$

Q2 : Si $E$ est un ensemble ouvert, $\partial E = \emptyset$.

Q3 : Si $E$ est un ensemble ouvert, $\overline{E} \neq E$

Q4 : Si $E$ est un ensemble fermé, $\partial E \subset E$.

Q5 : Si $E$ est un ensemble fermé, $\overline{\mathrm{int}(E)} = E$.

**Exercice 7.**
Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elles convergent et dans l'affirmative donner leur limite:

(i) $x_k = \left(\sqrt[k]{2},\ \sqrt[k]{3},\ \sqrt[k]{4}\right) \in \mathbb{R}^3$

(ii) $x_k = \left(\frac{\ln(k)}{k+1},\ \frac{\sin(k)}{k+1},\ \frac{(2k-1)^5}{(k+3)^3(2k+1)^2}\right) \in \mathbb{R}^3$

(iii) $x_k = \left(e^{-k},\ e^k\right) \in \mathbb{R}^2$

(iv) $x_k = \left(\arctan(k),\ e^{1-\frac{1}{k^7}}\right) \in \mathbb{R}^2$

(v) $x_k = \left(\frac{|\sin(k)|^3}{\sqrt[3]{k}},\ \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}{k}\right) \in \mathbb{R}^2$

**Solution des exercices calculatoires**

Exercice 1 $(i)$ $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = (x+K)e^{-\pi x} + \left(\frac{\pi x}{1+\pi} - \frac{\pi}{(1+\pi)^2}\right) e^x$, $K \in \mathbb{R}$

$(ii)$ $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{6}\sin\left(\frac{3}{2}x\right) + K_1 e^{\frac{3}{2}x} + K_2 x e^{\frac{3}{2}x}$, $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

$(iii)$ (En vrai, si vous avez l'expression $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$ et $y(x) = -1$ c'est ok.)

$\forall K < 3,\ y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$

si K=3, y: $]-\infty, 0[ \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$

et y: $]0, +\infty[$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$

$\forall K > 3,\ y\colon ]-\infty, -\sqrt{K^2-9}[$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$,

y: $]-\sqrt{K^2-9}, \sqrt{K^2-9}[ \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$

et y: $]\sqrt{K^2-9}, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{K}{\sqrt{x^2+9}-K}$,

y: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -1$

Exercice 2 (a) FAUX

(b) VRAI

(c) VRAI

(d) FAUX

Exercice 4 $(i)$ Ouvert

$(ii)$ Fermé

$(iii)$ Ouvert

$(iv)$ Ni ouvert ni fermé

$(v)$ Ni ouvert ni fermé

$(vi)$ Fermé

$(vii)$ Ouvert

Exercice 5 $(i)$ Fermé, non borné

$(ii)$ Ouvert, borné

$(iii)$ Ni ouvert, ni fermé, non-borné

$(iv)$ Ouvert, non borné

$(v)$ Fermé, borné

$(vi)$ Ouvert, borné

$(vii)$ Ni ouvert, ni fermé, borné.

Exercice 6 1 : VRAI

2 : FAUX

3 : FAUX

4 : VRAI

5 : FAUX

Exercice 7 $(i)$ $(1,1,1)$

$(ii)$ $(0,0,8)$

$(iii)$ diverge

$(iv)$ $\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$

$(v)$ $(0,0)$