Exercice 1.
Pour chacune des équations suivantes, trouver la solution générale ainsi qu'une solution satisfaisant les conditions initiales indiquées:

(*i*) $y'' + y' - 12y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 7$

(*ii*) $y'' + 4y' + 5y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

(*iii*) $y'' - 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$

Exercice 2.
Soit l'équation différentielle $y'' - y = q(x)$. Pour chacune des fonctions q et condition initiales données ci-dessous, trouver la solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale.

(*i*) $q(x) = 2x - x^3$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$.

(*ii*) $q(x) = -\frac{\pi^2+4}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{5\pi}{2}$

(*iii*) $q(x) = e^{2x}(3 - 4\cos(x) - 2\sin(x))$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

(*iv*) $q(x) = e^{-x}(2 - 4x)$, $y(0) = 2e$, $y'(0) = 0$

Exercice 3.
Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(*i*) $y'' + 2y = x^2 - x$

(*ii*) $y'' - 2y' + y = 2$

(*iii*) $y'' - 2y' + 5y = x^3$

(*iv*) $4y'' + 4y' - 3y = x - 1$

Exercice 4.
Soit l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = \frac{1}{1 + e^t}.$$

Trouver la solution générale de l'équation.
Suggestion : Pour calculer les primitives faire le changement de variables $s = e^t$.

Exercice 5 (Oscillateur harmonique)**.**
On suspend un masse $m > 0$ à un ressort de raideur $k > 0$. On écarte légérement la masse de sa position d'équilibre, avant de la relâcher.
On dénote par y_0 la distance qui sépare la masse de sa position d'équilibre au temps $t = 0$ et par $y(t)$ la distance au temps $t > 0$. (Par exemple, $y > 0$ si la masse se situe plus haut que sa position d'équilibre et $y < 0$ si elle se situe plus bas.) Si on néglige les frottements, $y(t)$ satisfait l'équation

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Trouver la solution y de l'équation ci-dessus, en supposant que la masse n'a pas de vitesse au temps $t = 0$ (garder k, m et y_0 comme paramètres).
`https://fr.wikipedia.org/wiki/Oscillateur_harmonique`

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 Le domaine de toutes les solutions ci-dessous est $\mathbb{R}$.

(i) Solution générale : $y(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 e^{3t}$, solution qui vérifie les conditions initiales : $y(t) = -e^{-4t} + e^{3t}$.

(ii) Solution générale : $y(t) = e^{-2t}(c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t))$, solution qui vérifie les conditions initiales : $y(t) = e^{-2t} \sin(t)$.

(iii) Solution générale : $y(t) = e^{3t}(c_1 + c_2 t)$, solution qui vérifie les conditions initiales : $y(t) = e^{3t}(1 + t)$.

Exercice 2 Le domaine de toutes les solutions ci-dessous est $\mathbb{R}$.

(i) $y(x) = x^3 + 4x + e^x + e^{-x}$

(ii) $y(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \pi(e^x - e^{-x})$

(iii) $y(x) = e^{2x} - \sin(x)e^{2x} + \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}$

(iv) $y(x) = x^2 e^{-x} + e^{x+1} + e^{1-x}$

Exercice 3 Le domaine de toutes les solutions ci-dessous est $\mathbb{R}$.

(i) $y(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 - x - 1\right) + C_1 \sin(\sqrt{2}x) + C_2 \cos(\sqrt{2}x)$

(ii) $y(x) = 2 + C_1 e^x + C_2 x e^x$

(iii) $y(x) = \frac{1}{5}x^3 + \frac{6}{25}x^2 - \frac{6}{125}x - \frac{72}{625} + C_1 e^x \sin(2x) + C_2 e^x \cos(2x)$

(iv) $y(x) = -\frac{1}{9}(3x + 1) + C_1 e^{-\frac{3}{2}x} + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$

Exercice 4 $y(t) = \frac{1}{3}\left(-te^t - 1 + e^t \log(1 + e^t) - e^{-t} + e^{-2t} \log(1 + e^t)\right) + K_1 e^t + K_2 e^{-2t}$

Exercice 5 $y(x) = y_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$