

Exercice 1.

Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes :

(i) $y' = y - 2$

(ii) $y' = -xy$

(iii) $y' + \frac{3}{x}y = 0$

Exercice 2.

Donner la solution maximale des équations différentielles suivantes vérifiant la condition initiale donnée :

(i) $yy' = e^{y^2-4x}$, condition initiale $y(0) = \sqrt{\log(2)}$.

(ii) $xy' - y = y^3$, condition initiale $y(1) = -1$.

Exercice 3.

Soit l'équation différentielle

$$y' - \cos(x)y + \cos(x)y^2 = 0.$$

Pour chacune des conditions initiales ci-dessous, trouver la solution de l'équation différentielle qui la vérifie :

(i) $y(0) = -1$

(ii) $y(0) = 0$

(iii) $y(0) = 1$.

Exercice 4.

Soit l'équation différentielle

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = -4\frac{x^3}{1+x^2}.$$

(i) Trouver la solution générale de l'équation.

(ii) Trouver la solution de l'équation qui vérifie la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 5.

Pour les équations différentielles suivantes, trouver la solution générale puis la solution qui vérifie la condition initiale donnée :

(i) $y' + 2y = 3 + 4x + 2x^2$, condition initiale $y(0) = 2$.

(ii) $y' - 3y = 2xe^{3x}$, condition initiale, $y(0) = 3$.

(iii) $y' - y = \sin(x) - x(\sin(x) + \cos(x))$, condition initiale, $y(0) = 0$.

Exercice 6 (Facultatif - un modèle d'écologie - croissance de population).

Exercice pensé par Samuel Dubuis et Théophile Boinnard

L'étude de la croissance ou la décroissance des populations animales, végétales, etc. dans un écosystème est aujourd'hui un enjeu crucial en écologie. On observe la disparition de certaines espèces ou au contraire le surdéveloppement d'espèces non indigènes introduites délibérément ou par accident. En général, la dynamique des différentes espèces dans un écosystème est décrite par un ensemble complexe d'équations différentielles car chaque population influence toutes les autres.

Parfois, ou sous certaines hypothèses, on peut simplifier la discussion et décrire l'évolution d'une population à l'aide d'un modèle plus simple. C'est par exemple le cas de la croissance d'une population de chenilles, dans un milieu de conifères, chassées par des oiseaux.

Le modèle ci-dessous a été introduit pour étudier la croissance de la population de chenille de l'épicéa, qui cause périodiquement de gros ravages en Amérique du nord lorsque cette dernière devient trop

importante [Ludwig, Jones, Holling, 1978]. Les chenilles se nourrissent des épicéas, et sont mangées à leurs tours par les oiseaux. Le modèle proposé se base sur l'hypothèse que la densité de la forêt et le nombre des prédateurs sont constants et ne sont pas influencés par la taille de la population d'insectes. Une justification est la suivante :

- La croissance/décroissance de la population de chenilles est un cycle de quelques mois, alors que la destruction/le renouvellement de la forêt se chiffre en année.
- La population de prédateurs est peu influencée par celle des chenilles car ils ne se nourrissent pas que de cette espèce. S'il n'y a pas de chenilles de l'épicéa, ils iront manger d'autres espèces.

Donc, sur une échelle de temps assez courte, on peut considérer que tant la population d'arbres que celle des oiseaux est constante. Le modèle avancé est le suivant : on note $y(t)$ le nombre d'individus dans la population de chenille que l'on cherche comme la solution de

$$y'(t) = ry(t) \left(1 - \frac{y(t)}{K}\right) - \frac{By^2(t)}{A + y^2(t)}$$

muni de la valeur initiale (nombre de chenilles observé à un instant t_0) $y(t_0) = y_0$. Ici t est compté en mois.

Voici quelques explications sur la nature de ce modèle :

- le facteur $ry(t)$ avec $r > 0$ décrit que la population de chenille croît exponentiellement (la génération suivante est un multiple de la génération précédente).
- le facteur $1 - \frac{y(t)}{K}$ – où $K > 0$ est le nombre maximal d'individus, dépendant des ressources à disposition (i.e. la taille de la forêt) – contrôle cette croissance exponentielle : quand $y(t) > K$, ce facteur devient négatif, et force la population à décroître. Le nombre de chenilles ne peut pas exploser trop.
- Le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ décrit l'influence des prédateurs. $B > 0$ est le nombre de prédateurs et $A > 0$ décrit la pression qu'ils exercent sur leurs proies. Ce terme est choisi sous cette forme pour deux raisons : plus $y(t)$ est petit, moins il a d'importance (moins il y a de chenilles, mieux la forêt les cache et donc moins les prédateurs les mangent). Au contraire, si le nombre de chenilles tend vers $+\infty$, ce terme est borné : les oiseaux ne peuvent pas manger plus de chenilles que tant.

Les quantités K, A, B, r sont déterminées par l'observation. Ici, pour l'exercice, on va considérer des valeurs simples pour pouvoir calculer la solution (dans la pratique, on peut par une mise à l'échelle des quantités arriver à quelque chose de similaire). De plus, on va imaginer que le terme décrivant l'impact des prédateurs est déjà arrivé à son régime maximum. On a

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{By^2}{A + y^2} = B.$$

On approxime donc le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ par $-B$ en imaginant que la population est déjà assez conséquente pour que le nombre de proies mangées soit proche du maximum possible (on peut sinon choisir de poser $A = 0$ et le terme $-\frac{By^2(t)}{A+y^2(t)}$ est toujours égal à $-B$ pour $y \neq 0$). L'équation sera plus simple ainsi, et nous pourrons la résoudre à la main.

Ici on va considérer le problème avec $r = 0.25$, $K = \frac{64}{3}$ (l'écosystème peut accueillir en moyenne 21 individus) et $B = 1$ (il y a un seul prédateur).

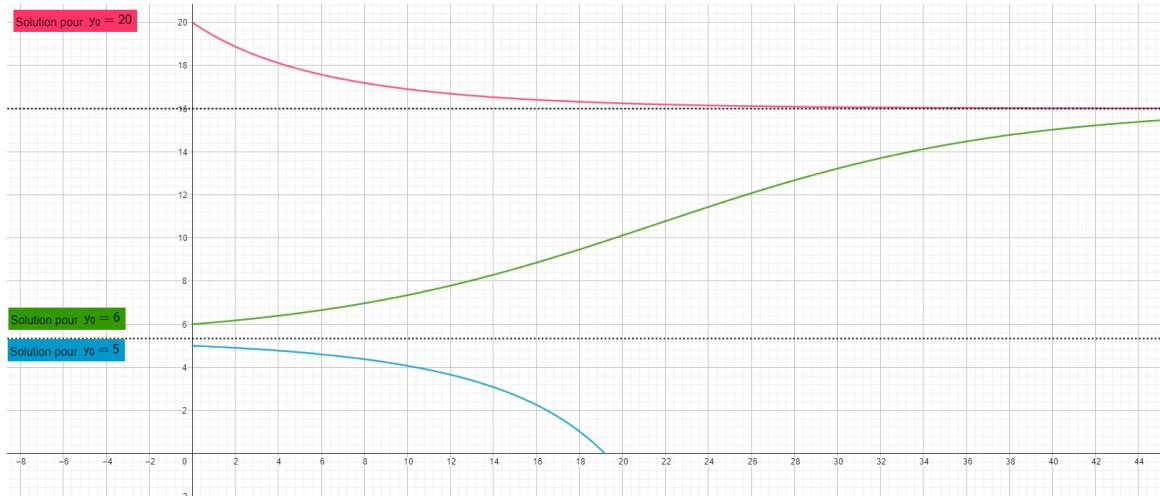
Si le paragraphe précédent n'est pas très convaincant, changeons d'univers et plutôt que des chenilles mangeant des épicéa pourchassées par des oiseaux, imagineons des Chenipans, dans la forêt de Jade, pourchassés par un Piafabec...

Le problème considéré est alors le suivant : chercher la solution $y(t)$ du problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{1}{4}y(t) \left(1 - \frac{3y(t)}{64}\right) - 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ci-dessous, une représentation graphique des solutions pour les conditions initiales $y_0 = 5$, $y_0 = 6$ et $y_0 = 20$.

- (i) Que représentent les lignes pointillées ?
- (ii) Que peut-on en conclure sur la population des Chenipans en fonction de la population initiale y_0 ?



Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 2 + Ce^x$ avec $C \in \mathbb{R}$

(ii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$

(iii) $y:]-\infty, 0[$ définie par $y(x) = C \frac{1}{x^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$ et $y:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = C \frac{1}{x^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Exercice 2 (i) $y: \left] -\frac{\log(2)}{4}, +\infty \right[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \sqrt{4x + \log(2)}$

(ii) $y:]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$

Exercice 3 (i) $y:]-\arcsin(\log(2)) - \pi, \arcsin(\log(2))[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{e^{\sin(x)}}{e^{\sin(x)} - 2}$

(ii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 0$

(iii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 1$

Exercice 4 (i) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{C-x^4}{1+x^2}$

(ii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 1 - x^2$

Exercice 5 Pour $C \in \mathbb{R}$:

(i) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 1 + x + x^2 + Ce^{-2x}$, $C = 1$, pour la condition initiale.

(ii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = x^2 e^{3x} + Ce^{3x}$, $C = 3$ pour la condition initiale.

(iii) $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = x \cos(x) - \sin(x) + Ce^x$, $C = 0$ pour la condition initiale.