Exercice 1 (Intégration directe)**.**
Trouver la solution générale des équations différentielles suivantes :

(i) $y' = 2x$ $\quad$ (ii) $y'' = a$ où $a \in \mathbb{R}$ est donné. $\quad$ (iii) $y'' = 3\sin(x)$

Exercice 2 (Propriétés des équations différentielles)**.**
Pour les équations suivantes, donner leur ordre et dire s'il s'agit d'équations automones :

(i) $3y''' + 1 = 0$

(ii) $\log(x)y' - x^2y + e^{-2x} = 0$

(iii) $\sin(x)y' - \sin(y) = 0$

(iv) $\dfrac{(y')^2}{\sqrt{x^2+5}} + \dfrac{y}{x} = 0$

(v) $y''y' + \cos(\pi x) = 0$

(vi) $y'' - 3(y')^2 + 4xy = 0$

(vii) $y'''+y''+y'+y+\sinh(x) = 0$

Exercice 3.
Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ce problème admet-t-il une solution ? Justifier.

Exercice 4.
Soit $w \in \mathbb{R}$ et l'équation différentielle

$$y'' + w^2y = 0.$$

(i) Pour $w \neq 0$, vérifier que les fonctions $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $C_1\cos(wx) + C_2\sin(wx)$ avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sont solution de l'équation différentielle.

(ii) Pour $w = 0$, trouver la solution générale de l'équation différentielle.

(iii) Donner la solution de l'équation différentielle

$$y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 2$.

Exercice 5. (i) Soit l'équation différentielle

$$y' - \tan(x)y = x.$$

Pour $k \in \mathbb{Z}$, vérifier que $y\colon \left]\frac{2k-1}{2}\pi, \frac{2k+1}{2}\pi\right[\to \mathbb{R}$, définie par $y(x) = 1 + x\tan(x) + \frac{C}{\cos(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle.

(ii) Soit l'équation différentielle

$$y' + y\cos(x) = \cos(x)^3.$$

Vérifier que $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = 2\sin(x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{3}{2} + Ce^{-\sin(x)}$ avec $C \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle.

Indication : On a (on peut retrouver ceci à l'aide des formules d'Euler)

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2x)\right)$$
$$\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Exercice 6.
Soit l'équation différentielle
$$y'\frac{2y(x-1)}{y^2+1}+\log(y^2+1)=0.$$

(i) Vérifier que $y\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $y(x)=0$ est solution de l'équation différentielle.

(ii) Vérifier que pour $C>0$, $y\colon]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $y(x)=\pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}-1}$ et que pour $C<0$, $y\colon]-\infty,1[\to\mathbb{R}$ définie par $y(x)=\pm\sqrt{e^{\left(\frac{C}{x-1}\right)}-1}$ sont solution de l'équation différentielle.

(iii) Trouver la solutions de l'équation différentielle qui vérifie la condition intitiale $y(2)=-3$ et celle qui vérifie la condition initiale $y\left(-\frac{3}{2}\right)=2$.

Exercice 7 (Séparation des variables)**.**
Pour les équations différentielles ci-dessous, donner la solution maximale qui satisfait la condition initiale donnée :

(i) $\dfrac{y'}{y^2}=\sin(x)$, condition initiale $y(0)=\frac{1}{2}$. (Ne pas se préocuper du domaine de y avant d'avoir trouvé la constante qui permet de satisfaire la condition initiale.)

(ii) $yy'=1$, condition initiale $y(1)=2$.

(iii) $y'=\dfrac{3}{x(1+y)}$, condition initiale $y(1)=0$. (Ne pas se préocuper du domaine de y avant d'avoir trouvé la constante qui permet de satisfaire la condition initiale.)

Exercice 8 (Séparation des variables : plusieurs solutions)**.**
Soit l'équation différentielle
$$yy'=1.$$
Trouver deux solutions $y\colon]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ de l'équation telles que $\lim_{x\to0^+}y(x)=0$.

Exercice 9.
Le but de cet exercice et d'utiliser les formules d'Euler pour trouver des primitives de fonctions de la forme $\cos^n(x)\sin^m(x)$.

(i) À l'aide des formules d'Euler, écrire les fonctions suivantes sous la forme de combinaison linéaires de constantes et de fonctions de la forme $\cos(\alpha x)$, $\sin(\beta x)$:

(a) $\cos^2(x)$ (b) $\sin^4(x)$ (c) $\sin^2(x)\cos^2(x)$

(ii) Donner les primitives des fonctions données ci-dessus.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) $y(x) = x^2 + C$

(ii) $y(x) = \frac{1}{2}ax^2 + C_1x + C_2$

(iii) $y(x) = -3\sin(x) + C_1x + C_2$

Exercice 2 (i) ordre 3, autonome

(ii) ordre 1, pas autonome

(iii) ordre 1, pas autonome

(iv) ordre 1, pas autonome

(v) ordre 2, pas autonome

(vi) ordre 2, pas autonome

(vii) ordre 3, pas autonome

Exercice 4 (ii) $y(x) = C_1x + C_2$

(iii) $y(x) = -\frac{4}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}x) + 3\sin(\frac{\pi}{2}x)$

Exercice 6 (iii) $y(x) = -\sqrt{10^{\frac{1}{x-1}} - 1}$, $y(x) = \sqrt{5^{\frac{5}{2(1-x)}} - 1}$.

Exercice 7 (i) $y\colon]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}$ défini par $y(x) = \frac{1}{\cos(x)+1}$

(ii) $y\colon]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $y(x) = \sqrt{2x+2}$.

(iii) $y\colon]e^{-\frac{1}{6}},+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = -1 + \sqrt{1 + 6\log x}$

Exercice 8 $y(x) = \pm\sqrt{2x}$.

Exercice 9 (i) (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

(b) $\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

(c) $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)$

(ii) (a) $\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin(2t) + C$

(b) $\frac{3x}{8} - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + C$

(c) $\frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin(4x) + C$