Exercice 1.
On admettra sans démonstration que

$$\lim_{R\to\infty} \iint_{B((0,0),R)} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy.$$

(L'idée est que la boule centrée en $(0,0)$ de rayon R recouvre tout $\mathbb{R}^2$ lorsque le rayon tend vers l'infini et que $\mathbb{R}^2$ est le "rectangle" $]-\infty,+\infty[\times]-\infty,+\infty[$. Notez que ceci est faux sans des hypothèses relativement fortes sur la fonction qu'on intègre mais qui sont vérifiées par $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.)

(i) Calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}dxdy$.

(ii) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice 2.
Pour les ensembles E et les fonctions f ci-dessous, calculer $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)dxdydz$.

(i) $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ 0\le y\le x,\ x^2+y^2\le 2,\ 0\le z\le 2\}$, $f(x,y,z) = \dfrac{z}{1+x^2+y^2}$

(ii) $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2\le z\le 9\}$, $f(x,y,z)=1$.

(iii) $E = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ y\ge 0,\ z\le 2,\ \frac{1}{2}(x^2+y^2)\le z\le x^2+y^2+1\Big\}$, $f(x,y,z)=y$

(iv) $E = \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ y\ge 0,\ 0\le z\le -x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}+2\Big\}$, $f(x,y,z)=x+1$.

Exercice 3.
Soit $E = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 1,\ x+y+z\ge 1,\ 2y-z\le 6\}$.
Calculer le volume de E.

Exercice 4.
Vrai ou faux ?

Q1 : Si $D\subset\mathbb{R}^3$ est fermé borné non-vide et $f\in C^0(D)$,

$$\mathrm{Vol}(D)\min_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z) \le \iiint_D f(x,y,z)dxdydz \le \mathrm{Vol}(D)\max_{(x,y,z)\in D} f(x,y,z)$$

Q2 : Si $D_1\subset D_2\subset\mathbb{R}^3$ sont fermés bornés non-vides, et $f\in C^0(D_2)$,

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)dxdydz \le \iiint_{D_2} f(x,y,z)dxdydz$$

Q3 : Si $D_1\subset D_2\subset\mathbb{R}^3$ sont fermés bornés non-vides, et $f,g\in C^0(D_2)$ sont tels que $f\le g$,

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)dxdydz \le \iiint_{D_2} g(x,y,z)dxdydz$$

Q4 : Si $D\subset\mathbb{R}^3$ est fermé borné non-vide et $f\in C^0(D)$ est tel que $f\ge 1$,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz \ge \mathrm{Vol}(D)$$

Q5 : Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est fermé borné non-vide et $f \in C^0(D)$ est tel que $1 \le f \le 2$

$$\iiint_D \frac{1}{f(x,y,z)} dxdydz \le \frac{1}{2}\,\mathrm{Vol}(D)$$

Exercice 5 (Coordonnées triangulaires)**.**
On admettra sans démonstration que si $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2), c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ sont trois points non-alignés

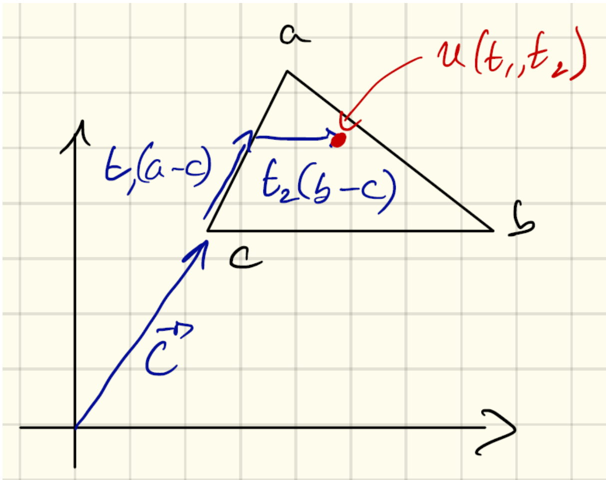
$$A = \{(t_1, t_2)\ :\ 0 \le t_1 \le 1,\ 0 \le t_2 \le 1 - t_1\}$$

et

$$u(t_1, t_2) = t_1 a + t_2 b + (1 - t_1 - t_2)c = c + t_1(a - c) + t_2(b - c),$$

Alors,

- $u(A)$ est le triangle de sommets a, b et c.
- $u\colon A \to u(A)$ est inversible,
- u, u^{-1} sont de classe C^∞



(i) Calculer le jacobien de u.

(ii) Calculer l'aire d'un triangle en fonction de ses trois sommets a, b et c.

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (*i*) π

(*ii*) $\sqrt{\pi}$

Exercice 2 (*i*) $\frac{\pi \log(3)}{4}$

(*ii*) $\frac{81\pi}{2}$

(*iii*) 4

(*iv*) $\frac{8\pi}{3}$

Exercice 3 $\pi + 1$

Exercice 4 Q1. VRAI

Q2. FAUX

Q3. FAUX

Q4. VRAI

Q5. FAUX

Exercice 5 (*i*) $\mathrm{Jac}(u)(t_1, t_2) = a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2$

(*ii*) $\frac{1}{2}|a_1b_2 + b_1c_2 + a_2c_1 - a_2b_1 - b_2c_1 - a_1c_2|$