

Exercice 1.

Vrai ou Faux ?

Q1: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et (x_0, y_0) un point stationnaire de f tel que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0.$$

Alors, (x_0, y_0) est un extrémum local.

Q2: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et (x_0, y_0) un point stationnaire de f tel que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0.$$

Alors, (x_0, y_0) est un point-selle.

Q3: Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et (x_0, y_0, z_0) un point stationnaire de f . Si (x_0, y_0, z_0) n'est pas un point-selle et $\det(H_f(x_0, y_0, z_0)) < 0$, alors (x_0, y_0, z_0) est un maximum local.

Exercice 2.

Soit $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = (y - x^2)^2.$$

Trouver le minimum et le maximum de f sous la contrainte $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Exercice 3.

Calculer $\iint_A f(x, y) dx dy$ dans les cas suivants :

- (i) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x\}$, $f(x, y) = xy$.
- (ii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x, x \geq 1\}$, $f(x, y) = \frac{2}{x}$.
- (iii) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y, \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\}$, $f(x, y) = y \sin(xy)$.

Exercice 4.

Soient $a < b$, $\alpha, \beta \in C^0([a, b])$ telles que $\alpha \leq \beta$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$. Montrer que

$$\text{Aire}(E) = \int_a^b \beta(x) - \alpha(x) dx.$$

Exercice 5.

Calculer les intégrales suivantes :

- (i) $\int_{-\sqrt{\pi}}^0 \int_{-\pi}^{-x^2} x \cos(x^2) \cos(\pi \cos(y)) dy dx.$
- (ii) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos(x)} 2 \sin(x) \sin(\cos(x)) \frac{\sin(y) - y \cos(1)}{1 + (\sin(y) - y \cos(1))^2} dy dx.$
- (iii) $\int_1^2 \int_0^{x^2-1} 3 \frac{(y - 3 - 4 \log(1 + y))^2}{x^3} dy dx.$

Exercice 6.

Calculer les intégrales $\iint_E f(x, y) dx dy$ dans les cas ci-dessous.

- (i) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, x \leq 0\}$, $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$
- (ii) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

$$(iii) \ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 2, \ y \geq 3-x\}, \ f(x, y) = e^{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

$$(iv) \ E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ y \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}\}, \ f(x, y) = 1$$

(Faire un dessin !)

Exercice 7.

Calculer la masse totale des volumes E suivants si leur densité est donnée par $\rho(x, y, z)$.

$$(i) \ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ z \leq 0, \ x + y \leq 3, \ z + 2y - x \geq 0\}, \ \rho(x, y, z) = 2.$$

$$(ii) \ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ z \leq 0, \ y + z + 2 \geq 0, \ x + y - z - 2 \leq 0\}, \ \rho(x, y, z) = -z.$$

Exercice 8.

Calculer $\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz$ dans les cas suivants :

$$(i) \ E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \geq 0, \ x \geq 0\} \text{ et } f(x, y, z) = zx.$$

$$(ii) \ E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ \frac{1}{2} \leq \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \right\} \text{ et } f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$(iii) \ E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ 0 \leq \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \leq \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \text{ et } f(x, y, z) = 1.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 Q1 : FAUX.

Q2 : VRAI.

Q3 : VRAI.

Exercice 2 maximum : $\left(\frac{25}{12}\right)^2$, minimum : 0.

Exercice 3 (i) $\frac{1}{8}$

(ii) 1

(iii) 0

Exercice 5 (i) 0

(ii) $\log(1 + (\sin(1) - \cos(1))^2)$

(iii) $8 \log(4)^3 - \frac{27}{8}$

Exercice 6 (i) $\frac{\pi}{2}$

(ii) $\frac{7}{9}$

(iii) $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

(iv) $1 + \frac{\pi}{2}$

Exercice 7 (i) 12

(ii) $\frac{8}{3}$

Exercice 8 (i) $\frac{62}{15}$

(ii) π

(iii) $\frac{8}{3} \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$