EPFL – Printemps 2025	D. Strütt
Analyse II – CGC SV	**Exercices**
Série 11	8 mai 2025

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants, sont-ils ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? bornés ?

(*i*) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2y \leq x+5, \ 3y + x \geq 0, \ y \geq 3x\}$

(*ii*) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$

(*iii*) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right\}$

Donner le bord de E, ∂E, pour les points (*i*) et (*ii*)

Exercice 2.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et non-vide et $f \colon E \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f prend son min et son max sur E.

Q2 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et non-vide et $f \colon E \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f prend son min et son max sur E.

Q3 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, borné et non-vide et $f \colon E \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f prend son min et son max sur E.

Q4 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné et non-vide et $f \colon \overline{E} \to \mathbb{R}$ continue. Alors, f prend son min et son max sur $\overline{E}$.

Q5 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé, borné et non-vide et $f \colon E \to \mathbb{R}$. Alors, f prend son min et son max sur E.

Q6 : Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et non-vide et $f \colon E \to \mathbb{R}$, une fonction continue telle qu'il existe $M > 0$ telle que $\forall x \in E$, $f(x) \leq M$. Alors, f prend son max sur E.

Exercice 3.
Pour les fonctions suivantes, trouver tous les extrémums locaux et points-selle.

(*i*) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + 2x + 2y + 1$.

(*ii*) $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y + 1$.

(*iii*) $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{xy}$.

Exercice 4.
Vrai ou Faux ?

Q1 : Soit $c \in \mathbb{R}$ un scalaire, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v \in \mathbb{R}^2$ un vecteur, $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ une matrice carrée symétrique de dimension 2 et $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = c + \langle v, (x-x_0, y-y_0)\rangle + (x-x_0, y-y_0)M(x-x_0,y-y_0)^T.$$

Alors, $\nabla f(x_0,y_0) = v$ et $H_f(x_0,y_0) = 2M$.

Q2 : Soit $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et (x_0,y_0) un point stationnaire de f. Si

$$\operatorname{tr}(H_f(x_0,y_0)) > 0,$$

alors (x_0,y_0) est un minimum local.

Q3 : Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et (x_0, y_0, z_0) un point stationnaire de f. Si

$$\det(H_f(x_0, y_0, z_0)) > 0 \text{ et } \operatorname{tr}(H_f(x_0, y_0, z_0)) > 0,$$

alors (x_0, y_0, z_0) est un minimum local.

Exercice 5.
Pour les fonctions $f\colon E \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante, trouver $\max_{(x,y)\in E} f(x, y)$ et $\min_{(x,y)\in E} f(x, y)$

(*i*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y \le 1\}$, $f(x, y) = x - y$.

(*ii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ -2 + x \le y \le 2 - x\}$, $f(x, y) = y^2 + xy - y$.

(*iii*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 3\}$, $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x - y$.

(*iv*) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le \frac{\pi}{4}\}$, $f(x, y) = \frac{1}{2}(2 + x^2)^2 + \sin(x^2 + y^2)$.

Exercice 6.
Pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, trouver le maximum et le minimum de f sous la contrainte $g(x) = 0$.

(*i*) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $g(x, y) = x^4 + y^4 - 32$.

(*ii*) $f(x, y, z) = z$, $g(x, y, z) = 4x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2yz - 4x - 1$.

Exercice 7.
Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ et $f\colon D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \frac{8}{3}x^3 + 6y^2 - 8x.$$

Trouver $\min_{(x,y)\in D} f(x, y)$, $\max_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

Exercice 8 (Interprétation géométrique du gradient le retour)**.**
Le but de cet exercice est de montrer que le gradient d'une fonction est toujours orthogonal aux ensembles de niveau.
Soit $n = 2$ ou 3, $D \subset \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D)$, $c \in \operatorname{Im}(f)$.

(*i*) $\boxed{n = 2}$ première interprétation de l'orthogonalité : Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(\{c\})$ tel que $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$. Montrer que si D est la droite tangente à $f^{-1}(\{c\})$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y})$, alors pour tout $(x, y) \in D$,

$$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), (x, y) - (\tilde{x}, \tilde{y}) \rangle = 0.$$

(*ii*) $\boxed{n = 2}$ deuxième interprétation de l'orthogonalité : Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in f^{-1}(\{c\})$ et $\gamma\colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ et pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $f(\gamma(t)) = c$. Montrer que

$$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}), \gamma'(0) \rangle = 0.$$

(*iii*) $\boxed{n = 3}$ première interprétation de l'orthogonalité : Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in f^{-1}(\{c\})$ tel que $\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \neq 0$. Montrer que si P est la plan tangent à $f^{-1}(\{c\})$ au point $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, alors pour tout $(x, y, z) \in P$,

$$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), (x, y, z) - (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \rangle = 0$$

(*iv*) $\boxed{n = 3}$ deuxième interprétation de l'orthogonalité : Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in f^{-1}(\{c\})$ et $\gamma\colon [-\delta, \delta] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^1 telle que $\gamma(0) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ et pour tout $t \in [-\delta, \delta]$, $f(\gamma(t)) = c$. Montrer que

$$\langle \nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}), \gamma'(0) \rangle = 0$$

Un exemple pour $n = 2$: `https://www.geogebra.org/calculator/u8ajftdd` ($f(x, y) = x^2 - y^3$)
Un exemple pour $n = 3$: `https://www.geogebra.org/calculator/b6gnmtsv` ($f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$)

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) E fermé, borné.

$$\begin{aligned}
\partial E =& \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \qquad \text{avec} \\
\Gamma_1 =& \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x = 2y-5,\ y\in[1,3]\Big\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y = \frac{x+5}{2},\ x\in[-3,1]\right\} \\
\Gamma_2 =& \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x = -3y,\ y\in[0,1]\Big\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y = -\frac{x}{3},\ y\in[-3,0]\right\} \\
\Gamma_4 =& \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y = 3x,\ x\in[0,1]\Big\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ x = \frac{y}{3},\ y\in[0,3]\right\}
\end{aligned}$$

(ii) E fermé, borné.

$$\partial E = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y = x^2,\ x\in[0,1]\Big\} \cup \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ y = \sqrt{x}\ x\in[0,1]\Big\}$$

(iii) E fermé, borné.

Exercice 2 Q1 : FAUX.

Q2 : FAUX.

Q3 : FAUX.

Q4 : VRAI.

Q5 : FAUX.

Q6 : FAUX.

Exercice 3 (i) Un minimum local en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

(ii) Un point-selle en $\left(-1, -\frac{1}{2}, 0\right)$.

(iii) Un point-selle en $(0,0)$.

Exercice 4 Q1 : VRAI.

Q2 : FAUX.

Q3 : FAUX.

Exercice 5 (i) $\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = -2$, $\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = \frac{1}{4}$

(ii) $\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = -\frac{1}{4}$, $\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 6$

(iii) $\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = -1$, $\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 6$

(iv) $\min_{(x,y)\in E} f(x,y) = 2$, $\max_{(x,y)\in E} f(x,y) = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{32}$

Exercice 6 (i) -16, 16

(ii) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 7 $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = \frac{47}{3}$ et $\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -\frac{16}{3}$