EPFL – Printemps 2025	D. Strütt
Analyse II – CGC SV	**Exercices**
Série 10	1 mai 2025

Exercice 1.
Parmi les ensembles suivants, sont-ils ouverts ? fermés ? les deux ? ni l'un ni l'autre ? bornés ?

(*i*) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

(*ii*) $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1,2], \ \frac{1}{x} \leq y \leq 4\right\}$

(*iii*) $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \sqrt[6]{x^2+y^2} < z < \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}} + 1\right\}$

Donner le bord de E, ∂E, pour les points (*i*) et (*ii*)

Exercice 2 (V/F)**.**
Vrai ou faux ?

Q1 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est différentiable.

Q2 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$. Alors, pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $c = f(x_0,y_0)$, l'équation $f(x,y) = c$ définit localement une fonction $y = g(x)$ telle que $g(x_0) = y_0$ et $f(x,g(x)) = c$.

Q3 : Soient $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g,h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe C^1 telles que $g(x_0) = y_0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ et $f(x,g(x)) = h(x)$. Alors,

$$g'(x_0) = \frac{h'(x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Exercice 3.
Soit $D =]0,+\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$, $\tilde{D} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, y = 0\}$, et $\varphi\colon D \to \tilde{D}$ définie par $\varphi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$.
Soit encore $f\colon \tilde{D} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla(f \circ \varphi)(r,\theta,z) = \Big(2r + \cos\theta z^2 - 2r\cos^2\theta, -r\sin\theta z^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta, 2r\cos\theta z\Big)$$

Calculer $\nabla f(0,1,1)$.

Exercice 4. (*i*) Soient $f,g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que

$$\det\left(\nabla(f \circ g)(x)\right) = \det\left(\nabla f(g(x))\right)\det\left(\nabla g(x)\right).$$

(*ii*) Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 inversible et $f^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son inverse. Supposons que f^{-1} est de classe C^1.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x)$ et $\nabla f^{-1}(x)$ sont des matrices inversibles.

(*iii*) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (e^x\cos(y), e^x\sin(y))$.

Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\det\nabla f(x,y) \neq 0$.

La fonction f est-elle inversible (bijective) ?

Exercice 5. (*i*) Soit $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(t) = \int_{1+\log(1+t^2)}^{e^t} x^{t-1}e^{-x}dx.$$

Calculer $F'(0)$.

(*ii*) Soit $F\colon]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$F(t) = \int_{\sqrt{t}}^{t-2} \frac{t}{1+x^4} dx.$$
Calculer $F'(4)$.

Exercice 6.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = e^{x^2+y}\sin(x-y^2),$$
$(\tilde{x},\tilde{y}) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{\pi+2}}{2}\right)$ et $c = f(\tilde{x},\tilde{y})$.
Montrer que dans un petit voisinage de $(\tilde{x},\tilde{y})$ l'ensemble de niveau c de f est le graphe d'une fonction de x ou y. Donner la dérivée de cette fonction en $\tilde{x}$ si vous montrez qu'il s'agit d'une fonction de x ou en $\tilde{y}$ si vous montrer qu'il s'agit d'une fonction de y.

Exercice 7.
Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = (x-y)e^{xy}$$
et $(x_0,y_0) = (1,0)$. L'équation $f(x,y) = 1$ définit dans un voisinage de $(1,0)$ une fonction $x = g(y)$ telle que $g(y_0) = x_0$ et $f(g(y),y) = 1$.
Calculer $g'(y_0)$.

Exercice 8.
Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y,z) = x^2 + \sin(xy) + z$$
et $(x_0,y_0,z_0) = (1,0,4)$.
L'équation $f(x,y,z) = 5$ définit dans un voisinage de $(x_0,z_0) = (1,4)$ une fonction $y = g(x,z)$ telle que $g(x_0,z_0) = y_0$ et $f(x,g(x,z),z) = 5$.
Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,4)$.

Exercice 9.
Pour les ensembles $S \subset \mathbb{R}^3$ ci-dessous, donner l'équation du plan tangent à S en $(x_0,y_0,z_0) \in S$.

(*i*) $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 4\right\}$, $(x_0,y_0,z_0) = (-1,2,-2)$.

(*ii*) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ -2\cos(\pi x) + x^2y + 3e^{xz} + yz = 23\}$, $(x_0,y_0,z_0) = (3,2,0)$.

Exercice 10.
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^1 et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$.
Montrer, à l'aide du théorème des fonctions implicites, qu'il existe un intervalle ouvert I tel que $f(x_0) \in I$ et une fonction $\psi \in C^1(I)$ telle que pour tout $y \in I$,
$$f(\psi(y)) = y.$$

Solution des exercices calculatoires

Exercice 1 (i) E est ouvert et borné. $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2=4\}$

(ii) E est fermé et borné.

$$\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x=1, \ 1 \leq y \leq 4\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x=2, \ \tfrac{1}{2} \leq y \leq 4\right\}$$

$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1,2], \ y = \tfrac{1}{x}\right\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in [1,2], \ y=4\}$$

(iii) E est ouvert et borné.

Exercice 2 **Q1 :** VRAI.

Q2 : FAUX.

Q3 : VRAI.

Exercice 3 $\nabla f(0,1,1) = (1,2,0)$.

Exercice 5 (i) e^{-1}

(ii) $\frac{3}{17}$

Exercice 7 $g'(y_0) = 0$.

Exercice 8 $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1,4) = -2$.

Exercice 9 (i) L'équation du plant tangent est $-2x+2y-z-8=0$.

(ii) L'équation du plant tangent est $12x+9y+11z-54=0$.