

Ens. D. Strütt

Analyse II - SV-CGC

17 juin 2024

Durée : 210 minutes

12

Lae'Zel

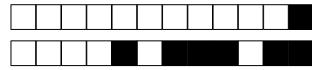
SCIPER : 3

Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
 - +3 points si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
 - +1 point si la réponse est correcte,
 - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
 - 1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes Read these guidelines Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien		
choisir une réponse select an answer Antwort auswählen	ne PAS choisir une réponse NOT select an answer NICHT Antwort auswählen	Corriger une réponse Correct an answer Antwort korrigieren
ce qu'il ne faut PAS faire what should NOT be done was man NICHT tun sollte		



Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures.
Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1: Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < \pi\}$ et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x+z}{\sin(y)} + xyz.$$

L'équation $f(x, y, z) = 2 + \frac{2}{\pi}$ définit implicitement une fonction $z = g(x, y)$ qui satisfait $g\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f(x, y, g(x, y)) = 2 + \frac{2}{\pi}$ dans un voisinage de $(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$. La valeur de $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ est alors

- $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$
- $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$
- $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}$
- $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Question 2: Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{5x}{1+2y^5} dy \right) dx.$$

Alors

- $I = \frac{1}{4} \log(3)$
- $I = \frac{1}{2} \log(3)$
- $I = \frac{1}{2} \log(2)$
- $I = \log(2)$

Question 3: Soit $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + y^2}.$$

Alors

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = -\frac{1}{2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$



Question 4: Soit $F: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^t \log(3e^t - x - 1) dx.$$

Alors, pour tout $t > 0$,

$F'(t) = \log(3e^t - 1) - \log(2)$

$F'(t) = \frac{3e^t - x}{3e^t - x - 1}$

$F'(t) = \log(3e^t - 1)$

$F'(t) = \log(3e^t - 1) + \log(2)$

Question 5: Soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^4y^3 + \cos(1 - x^2y)\}$$

et soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(-1, 1, z_0) \in S$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 1, z_0)$ est

$4x - 3y + z + 7 = 0$

$4x - 3y + z - 2 = 0$

$4x - 3y + z + 5 = 0$

$4x - 3y + z - 9 = 0$

Question 6: Soit $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{2t}{1+t} \right).$$

Alors, la longueur de γ est

$\frac{2\sqrt{5}}{3}$

$4 - \log(3)$

$\frac{2}{3}$

$\frac{\sqrt{5}}{3}$

Question 7: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \log(1 + y^2) - xy.$$

Alors

la fonction f admet un unique point de minimum local sur \mathbb{R}^2

la fonction f admet un point stationnaire sur \mathbb{R}^2 qui n'est pas un point d'extremum local

la fonction f n'a pas de point stationnaire sur \mathbb{R}^2

la fonction f admet un unique point de maximum local sur \mathbb{R}^2



Question 8 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = xy$$

et soit $g(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 12$. Alors, sous la contrainte $g(x, y) = 0$, la valeur maximale de f est

- 8
- 12
- 6
- 4

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

- $y(\log(3)) = -\frac{4}{9}$
- $y(\log(3)) = -\frac{1}{3}$
- $y(\log(3)) = -12$
- $y(\log(3)) = 0$

Question 10 : Soit D le sous-ensemble de \mathbb{R}^2 donné par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, -x \leq y \leq x\}.$$

Alors l'intégrale

$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy$$

est égale à

- $\frac{3}{4}$
- $\frac{7}{3}$
- $\frac{15}{4}$
- $\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$



Question 11: Soit (x_n) la suite d'éléments de \mathbb{R}^2 définie par

$$x_n = \left(n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \frac{(-1)^n}{n} \sin(n) \right), \quad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Alors

- la suite est bornée mais pas convergente
- la suite n'est pas bornée
- la suite converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (0, 1)$
- la suite converge et $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (1, 0)$

Question 12: Soit D le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 donné par

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, z \geq \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right\}.$$

Alors le volume de D est égal à

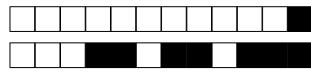
- 63π
- $\frac{\pi}{2}$
- $\frac{21\pi}{2}$
- $\frac{3\pi}{2}$

Question 13: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y + y^3x}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors

- f est continue en $(0, 0)$ mais f n'est pas différentiable en $(0, 0)$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ n'existe pas
- f n'est pas continue en $(0, 0)$
- f est différentiable en $(0, 0)$



Question 14: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \sin(\pi x^2 y).$$

Alors la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1)$ de f en $(1, 1)$ suivant le vecteur $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ vaut

- 0
- $-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$
- -3π
- $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$

Question 15: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- $y(2) = -\frac{2}{15}$
- $y(2) = \frac{3}{20}$
- $y(2) = 0$
- $y(2) = -\frac{1}{10}$

Question 16: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x, y) = (xy, x^2 + y^2)$$

et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla g(1, 2) = \left(1, -\frac{1}{4}\right).$$

Alors la fonction composée $h = g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

- $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, 0\right)$
- $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{7}{4}, 1\right)$
- $\nabla h(1, 1) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$



Question 17: La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{x^2 + 9}(y(x) - 1)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

- $y(4) = 6$
- $y(4) = 26$
- $y(4) = 11$
- $y(4) = 0$

Question 18: Le sous-ensemble

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

- est ouvert et non borné
- est ouvert et borné
- est fermé et non borné
- est fermé et borné

Question 19: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = 2 \cos(3y - x) - \sin^2(4x - y).$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0, 0)$ est

- $p_2(x, y) = 2 - 18x^2 + 20xy - 19y^2$
- $p_2(x, y) = 2 - 17x^2 + 14xy - 10y^2$
- $p_2(x, y) = 2 - 4x + y - x^2 + 6xy - 9y^2$
- $p_2(x, y) = 2 - 4x + y - 2x^2 + 12xy - 18y^2$



Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 20 : Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$.

Si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$, alors $f(x_0, y_0) = L$.

VRAI FAUX

Question 21 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, alors $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| = 1$.

VRAI FAUX

Question 22 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim_{r \rightarrow 0} g(r) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \leq h(r) \quad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \theta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

VRAI FAUX

Question 23 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y) = (f(x, y))^2 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $p(x, y)$ est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f autour de $(0, 0)$, alors $(p(x, y))^2$ est le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction g autour de $(0, 0)$.

VRAI FAUX

Question 24 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de \mathbb{R}^n . Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

VRAI FAUX

Question 25 : Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Si $z = 3$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(2, 0, 3)$, alors $\nabla f(2, 0) = (0, 0)$.

VRAI FAUX

Question 26 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^2 , alors l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ et } z = 0\}$$

est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^3 .

VRAI FAUX



Question 27: Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 . Si (x_0, y_0) est un point d'extremum de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.

VRAI FAUX

Question 28: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(0, 0)$, telle que

$$f(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla f(0, 0) = (0, 0).$$

Alors

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

VRAI FAUX

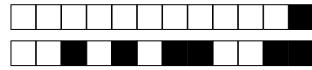
Question 29: Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x, y) = f(x^2 + y^2).$$

Si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, alors

$$\iint_D g(x, y) dx dy = 2\pi \int_0^1 f(r^2) r dr.$$

VRAI FAUX

**Troisième partie, questions de type ouvert**

- Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
- Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 30 : *Cette question est notée sur 7 points.*

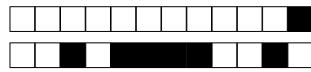
0 1 2 3 4 5 6 7

Réservé au correcteur

Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2 + x^3 + xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (i) Déterminer si f est différentiable en $(0, 0)$. Justifiez soigneusement votre réponse.
(ii) Soit $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$.



+1/11/50+





Question 31: Cette question est notée sur 6 points.

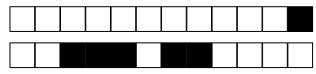
0 1 2 3 4 5 6

Réserve au correcteur

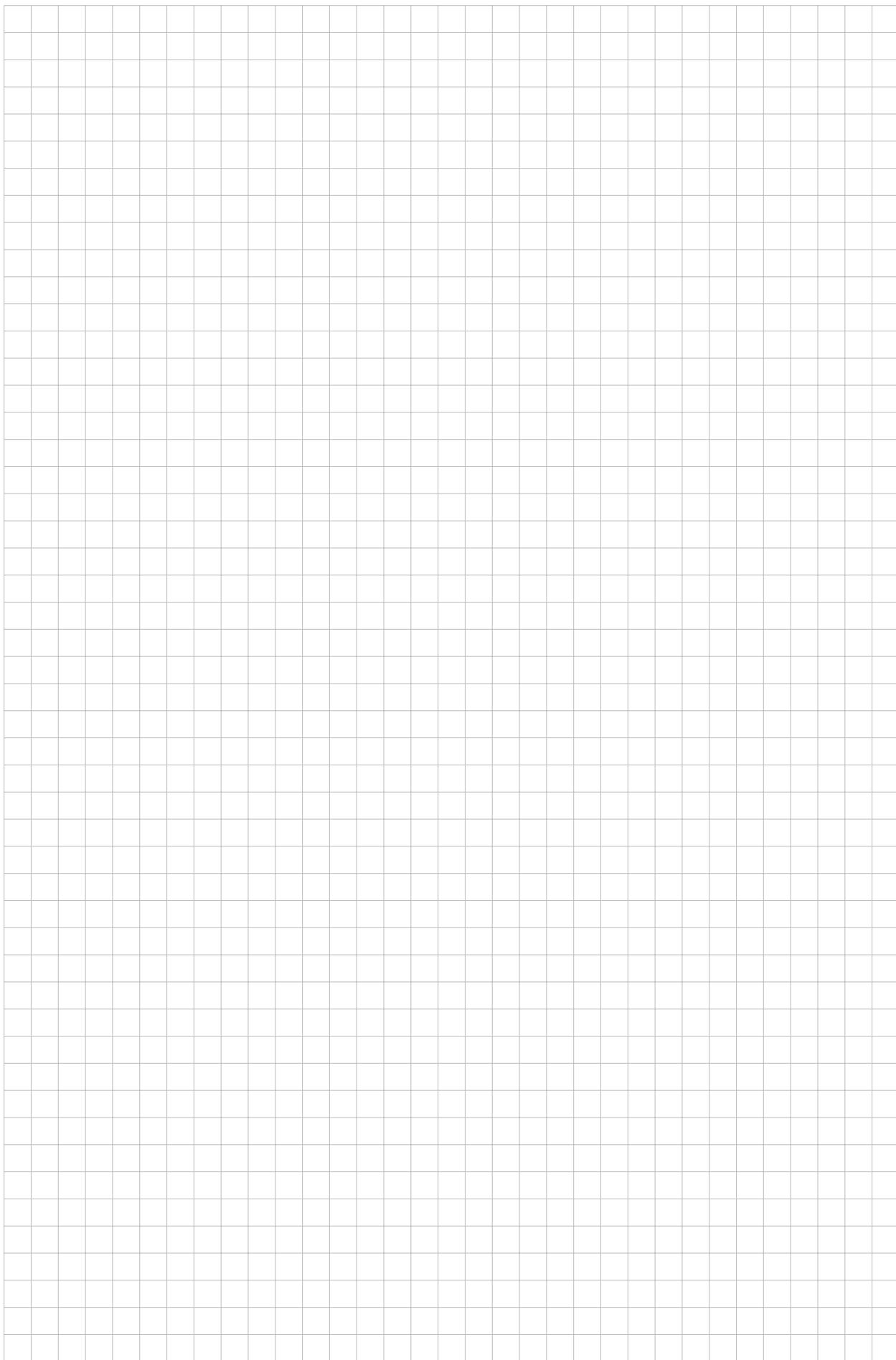
Soient $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 1 - x \leq y \leq 1\}$ et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \log(1 + x^2 + y^2).$$

Trouver $\min_{(x,y) \in E} f(x, y)$ et $\max_{(x,y) \in E} f(x, y)$. Justifiez soigneusement votre réponse.

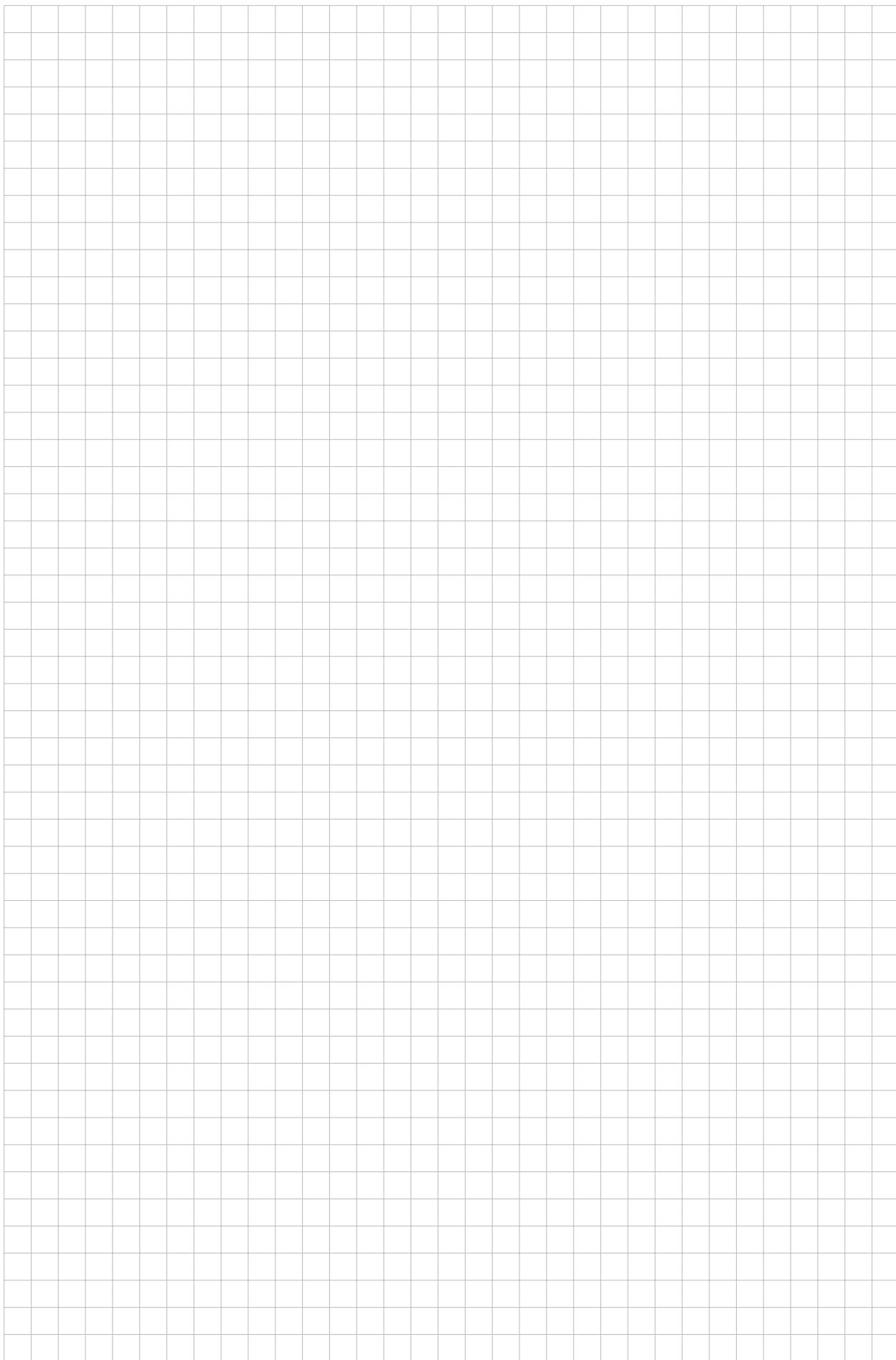


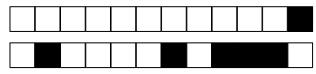
+1/14/48+



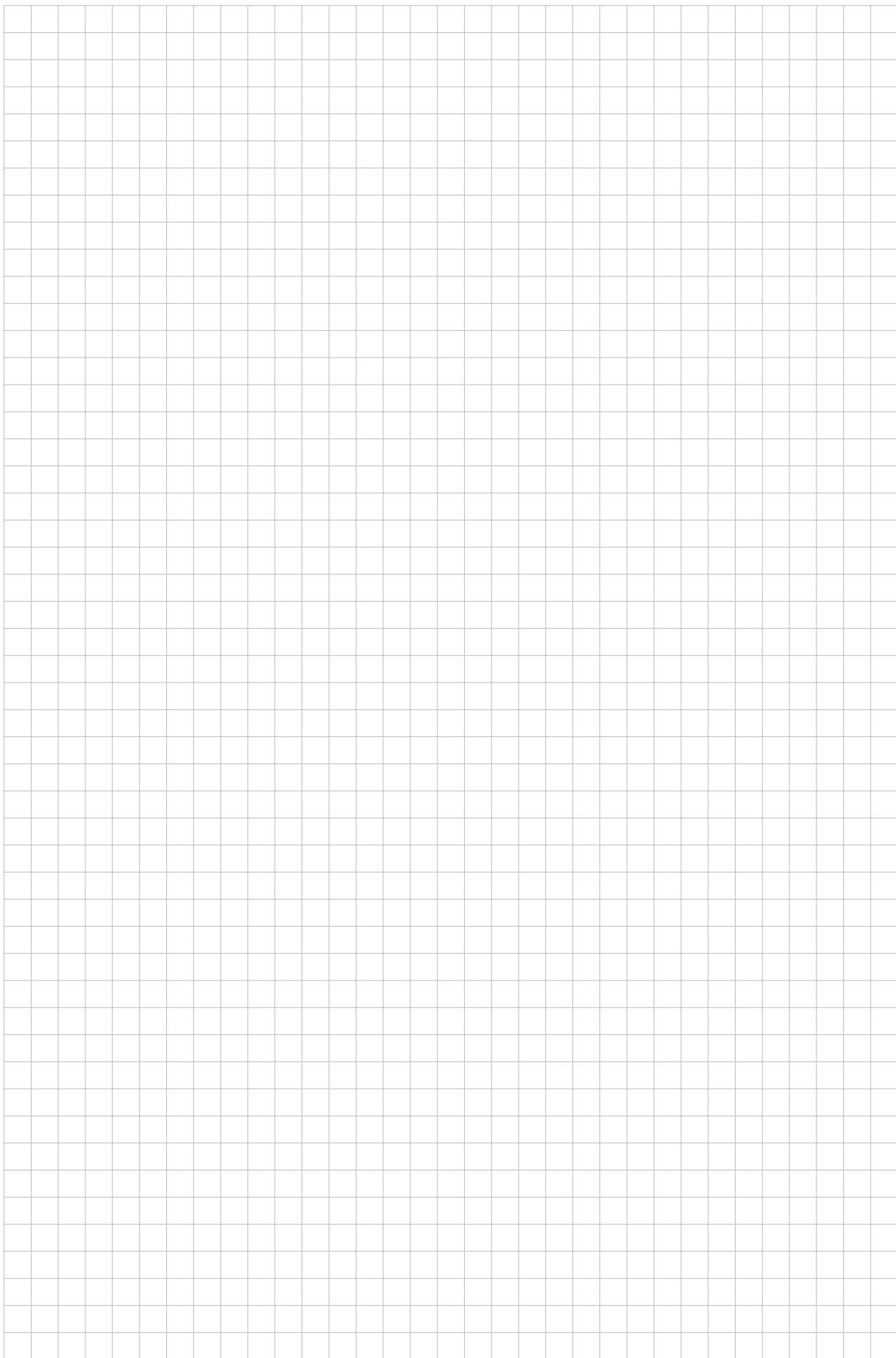


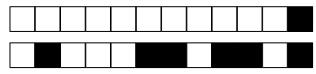
+1/15/47+





+1/16/46+





+1/17/45+

