EPFL

Ens. D. Strütt
Analyse II - SV-CGC
17 juin 2024
Durée : 210 minutes

12

Lae'Zel

SCIPER : **3** Signature :

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 16 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  - $+3$ points si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :
  - $+1$ point si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - -1 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.

Respectez les consignes suivantes | Read these guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < \pi\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = \frac{x + z}{\sin(y)} + xyz\,.$$

L'équation $f(x, y, z) = 2 + \frac{2}{\pi}$ définit implicitement une fonction $z = g(x, y)$ qui satisfait $g\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $f\big(x, y, g(x, y)\big) = 2 + \frac{2}{\pi}$ dans un voisinage de $(x, y) = \left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$. La valeur de $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right)$ est alors

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\pi}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial y}\left(\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

Question 2 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{5x}{1 + 2y^5}\, dy \right) dx\,.$$

Alors

- ☐ $I = \frac{1}{4}\log(3)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\log(3)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\log(2)$
- ☐ $I = \log(2)$

Question 3 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2 + y^2}\,.$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2}$

Question 4 : Soit $F\colon\ ]0,+\infty[\ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_0^t \log(3e^{t-x} - 1)\,dx\,.$$

Alors, pour tout $t > 0$,

- ☐ $F'(t) = \log(3e^{t} - 1) - \log(2)$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{3e^{t-x}}{3e^{t-x} - 1}$
- ☐ $F'(t) = \log(3e^{t} - 1)$
- ☐ $F'(t) = \log(3e^{t} - 1) + \log(2)$

Question 5 : Soit S la surface

$$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^4y^3 + \cos(1 - x^2y)\big\}$$

et soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(-1,1,z_0) \in S$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(-1,1,z_0)$ est

- ☐ $4x - 3y + z + 7 = 0$
- ☐ $4x - 3y + z - 2 = 0$
- ☐ $4x - 3y + z + 5 = 0$
- ☐ $4x - 3y + z - 9 = 0$

Question 6 : Soit $\gamma\colon [0,2] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{1+t}, \frac{2t}{1+t}\right).$$

Alors, la longueur de γ est

- ☐ $\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$
- ☐ $4 - \log(3)$
- ☐ $\dfrac{2}{3}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Question 7 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \log(1+y^2) - xy\,.$$

Alors

- ☐ la fonction f admet un unique point de minimum local sur $\mathbb{R}^2$
- ☐ la fonction f admet un point stationnaire sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un point d'extremum local
- ☐ la fonction f n'a pas de point stationnaire sur $\mathbb{R}^2$
- ☐ la fonction f admet un unique point de maximum local sur $\mathbb{R}^2$

Question 8 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy$$

et soit $g(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 12$. Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$, la valeur maximale de f est

- ☐ 8
- ☐ -12
- ☐ 6
- ☐ 4

Question 9 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

- ☐ $y\big(\log(3)\big) = -\dfrac{4}{9}$
- ☐ $y\big(\log(3)\big) = -\dfrac{1}{3}$
- ☐ $y\big(\log(3)\big) = -12$
- ☐ $y\big(\log(3)\big) = 0$

Question 10 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 2\,,\ x \ge 0\,,\ -x \le y \le x\big\}\,.$$

Alors l'intégrale

$$\iint\limits_D \big(x^2 - y^2\big)dx\,dy$$

est égale à

- ☐ $\frac{3}{4}$
- ☐ $\frac{7}{3}$
- ☐ $\frac{15}{4}$
- ☐ $\frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$

Question 11 : Soit $\big(x_n\big)$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$x_n = \left(n\sin\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big),\ \frac{(-1)^n}{n}\sin(n)\right), \qquad \text{pour tout } n \in \{1,2,3,\dots\}.$$

Alors

- ☐ la suite est bornée mais pas convergente
- ☐ la suite n'est pas bornée
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \big(0,\,1\big)$
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \big(1,\,0\big)$

Question 12 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 16\,,\ z \geq \tfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big\}\,.$$

Alors le volume de D est égal à

- ☐ 63π
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\dfrac{21\pi}{2}$
- ☐ $\dfrac{3\pi}{2}$

Question 13 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+y^3x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est continue en $(0,0)$ mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$

Question 14 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(\pi x^2 y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial v}(1,1)$ de f en $(1,1)$ suivant le vecteur $v = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ vaut

- ☐ 0
- ☐ $-\dfrac{3\pi}{\sqrt{2}}$
- ☐ -3π
- ☐ $\dfrac{6\pi}{\sqrt{5}}$

Question 15 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = -\dfrac{2}{15}$
- ☐ $y(2) = \dfrac{3}{20}$
- ☐ $y(2) = 0$
- ☐ $y(2) = -\dfrac{1}{10}$

Question 16 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \big(xy,\, x^2 + y^2\big)$$

et soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla g(1,2) = \left(1,\, -\tfrac{1}{4}\right).$$

Alors la fonction composée $h = g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait

- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\tfrac{3}{2}\,,\,0\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\tfrac{1}{2}\,,\,\tfrac{1}{2}\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\tfrac{7}{4}\,,\,1\right)$
- ☐ $\nabla h(1,1) = \left(\tfrac{3}{4}\,,\,\tfrac{3}{2}\right)$

Question 17 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+9}\big(y(x)-1\big)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

- ☐ $y(4) = 6$
- ☐ $y(4) = 26$
- ☐ $y(4) = 11$
- ☐ $y(4) = 0$

Question 18 : Le sous-ensemble

$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

- ☐ est ouvert et non borné
- ☐ est ouvert et borné
- ☐ est fermé et non borné
- ☐ est fermé et borné

Question 19 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = 2\cos(3y-x) - \sin^2(4x-y)\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 2 - 18x^2 + 20xy - 19y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 2 - 17x^2 + 14xy - 10y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 2 - 4x + y - x^2 + 6xy - 9y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 2 - 4x + y - 2x^2 + 12xy - 18y^2$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 20 : Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, alors $f(x_0, y_0) = L$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|v\| = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \le f\big(r\cos(\theta)\,,\, r\sin(\theta)\big) \le h(r) \qquad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \theta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = \big(f(x,y)\big)^2 \qquad \text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $p(x,y)$ est le polynôme de Taylor d'ordre 1 de f autour de $(0,0)$, alors $\big(p(x,y)\big)^2$ est le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction g autour de $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Si $z = 3$ est l'équation du plan tangent au graphe de f au point $(2,0,3)$, alors $\nabla f(2,0) = \big(0,\, 0\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ et } z = 0\big\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soient $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. Si (x_0, y_0) est un point d'extremum de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = \big(0,\, 0\big)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(0,0)$, telle que

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla f(0,0) = \big(0,\, 0\big)\,.$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$g(x,y) = f(x^2+y^2)\,.$$

Si $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\big\}$, alors

$$\iint_D g(x,y)\,dx\,dy = 2\pi \int_0^1 f(r^2)\,r\,dr\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 30 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 *Réservé au correcteur*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 + x^3 + xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Déterminer si f est différentiable en $(0,0)$. Justifiez soigneusement votre réponse.

(ii) Soit $v = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$.

Question 31 : *Cette question est notée sur 6 points.*

$\square_0$ $\square_1$ $\square_2$ $\square_3$ $\square_4$ $\square_5$ $\square_6$ *Réservé au correcteur*

Soient $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1\,,\ 1-x \le y \le 1\big\}$ et $f\colon E \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \log\big(1 + x^2 + y^2\big)\,.$$

Trouver $\displaystyle\min_{(x,y)\in E} f(x,y)$ et $\displaystyle\max_{(x,y)\in E} f(x,y)$. Justifiez soigneusement votre réponse.