Durée : 144 minutes

Analyse II
Examen
Partie commune
Printemps 2023

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,
0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy^2 - x^2y\,.$$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(2,1)$ suivant le vecteur $v = \left(\frac{3}{5}\,,\,-\frac{4}{5}\right)$ vaut

- ☐ $-\dfrac{2}{5}$
- ☐ $-\dfrac{1}{5}$
- ☐ $-\dfrac{9}{5}$
- ☐ $-\dfrac{8}{5}$

Question 2 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ donné par

$$D = \left\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ 4x + 2y + z \leq 8\,\right\}.$$

Alors le volume de D est

- ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{4-2x} \left(\int_0^{8-4x-2y} 1\,dz \right) dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^4 \left(\int_0^{8-2y} \left(\int_0^{8-4x} 1\,dz \right) dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^2 \left(\int_0^{2-4x} \left(\int_0^{8-2y} 1\,dz \right) dy \right) dx$
- ☐ $\displaystyle\int_0^8 \left(\int_0^{2-y} \left(\int_0^{8-4x-2y} 1\,dz \right) dx \right) dy$

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x\,y'(x) = \frac{\big(y(x)\big)^2}{\log(x) + 1}$$

sur l'intervalle $]1,+\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(e) = -\dfrac{1}{2\log(2)}$ vérifie aussi

- ☐ $y(e^3) = \dfrac{1}{4\log(2)}$
- ☐ $y(e^3) = -\dfrac{1}{3\log(2)}$
- ☐ $y(e^3) = -\dfrac{1}{\log(2)}$
- ☐ $y(e^3) = -\dfrac{1}{2\log(2)}$

Question 4 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = e^{x^2+4x-2y}\,.$$

Alors le polynôme de Taylor d'ordre deux de f autour du point $(0,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 4x - 2y + 9x^2 - 4xy + 2y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 4x - 2y + 18x^2 - 8xy + 4y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 4x - 2y + 18x^2 - 16xy + 4y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 4x - 2y + 9x^2 - 8xy + 2y^2$

Question 5 : Soit $F :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(t) = \int_{1/t}^{t^2} \frac{\log(1+tx)}{x}\,dx\,.$$

Alors, pour tout $t > 0$,

- ☐ $F'(t) = \dfrac{2\log(1+t^3)}{t} + \dfrac{\log(2)}{t}$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{3\log(1+t^3)}{t}$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{3\log(1+t^3)}{t} - \dfrac{2\log(2)}{t}$
- ☐ $F'(t) = \dfrac{\log(1+t^3)}{t^2} - t\log(2) + \dfrac{\log(1+t^3)}{t} - \dfrac{\log(2)}{t}$

Question 6 : Soit

$$I = \int_0^1 \left(\int_{y^3}^1 \frac{36y^8}{1+x^4}\,dx \right) dy\,.$$

Alors

- ☐ $I = \frac{1}{4}\log(2)$
- ☐ $I = 2\log(2)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\log(2)$
- ☐ $I = \log(2)$

Question 7 : Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$g(x, y, z) = \big(xy,\, xz,\, yz\big)$$

et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u, v, w) = uvw\,.$$

Alors la fonction composée $h = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfait

- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial z}(-1, 0, 1) = 1$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial z}(-1, 0, 1) = 0$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial z}(-1, 0, 1) = 2$
- ☐ $\dfrac{\partial h}{\partial z}(-1, 0, 1) = -1$

Question 8 : Soit S la surface

$$S = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + y^2 - e^z = 0\big\}$$

et soit $z_0 \in \mathbb{R}$ tel que $(-1, 2, z_0) \in S$. Alors

- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 2, z_0)$ est $3x + 4y - z - 5 = 0$
- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 2, z_0)$ est $3x - 2y - z + 7 = 0$
- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 2, z_0)$ est $3x + 2y - z - 1 = 0$
- ☐ l'équation du plan tangent à S au point $(-1, 2, z_0)$ est $3x - 4y - z + 11 = 0$

Question 9 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = 3x^2 e^z + y e^x + y z^2\,.$$

L'équation $f(x, y, z) = 3$ définit implicitement une fonction $z = g(x, y)$ qui satisfait $g(1, 0) = 0$ et $f\big(x, y, g(x, y)\big) = 3$ dans un voisinage de $(x, y) = (1, 0)$. La valeur de $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0)$ est alors

- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -3$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = \dfrac{e}{2}$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -e$
- ☐ $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = -\dfrac{e}{3}$

Question 10 : Le sous-ensemble

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq 1 \text{ et } y \leq x^2\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

- ☐ est non borné et n'est pas fermé
- ☐ est fermé et borné
- ☐ est borné et n'est pas fermé
- ☐ est fermé et non borné

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{x-y} - x + e^{2y}.$$

Alors

- ☐ la fonction f admet un unique point de minimum local sur $\mathbb{R}^2$
- ☐ la fonction f admet un unique point de maximum local sur $\mathbb{R}^2$
- ☐ la fonction f admet un point stationnaire sur $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas un point d'extremum local
- ☐ la fonction f n'a pas de points stationnaires sur $\mathbb{R}^2$

Question 12 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq |x|\right\}.$$

Alors l'intégrale

$$\iint_D y \, dx \, dy$$

vaut

- ☐ $\dfrac{7\pi}{6}$
- ☐ $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$
- ☐ 0
- ☐ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

Question 13 : Soit (a_n) la suite d'éléments de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$a_n = \left(\frac{(-1)^n}{n},\ (-1)^n,\ (-1)^n n\right), \qquad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Alors

- ☐ la suite admet une sous-suite bornée
- ☐ la suite est bornée
- ☐ la suite admet une sous-suite convergente
- ☐ la limite $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ n'existe pas

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{y^2 \sin^2(x)}{x^4 + y^2}.$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \dfrac{\pi^2}{4}$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ f est continue en $(0,0)$, mais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- ☐ f est continue en $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$

Question 16 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{e^x}{e^x+1}\, y(x) = \frac{1}{e^x+1}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(0) = -2$
- ☐ $y(0) = \frac{1}{2}$
- ☐ $y(0) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $y(0) = 2$

Question 17 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = xy^3$$

et soit $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Alors, sous la contrainte $g(x,y) = 0$, la valeur maximale de f est

- ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$
- ☐ $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$
- ☐ $\dfrac{\sqrt{3}}{16}$
- ☐ $\dfrac{1}{4}$

Question 18 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = 2x^2 - 2x$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 2$ vérifie aussi

- ☐ $y(1) = \frac{5}{4} + 2e$
- ☐ $y(1) = 5 - 2e^2$
- ☐ $y(1) = 5$
- ☐ $y(1) = 5 + 2e - 2e^2$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 19 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^3. Alors

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x,y,z)\,, \qquad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 20 : Soient A et B deux sous-ensembles non-vides de $\mathbb{R}^2$. Alors le sous-ensemble C défini par

$$C = \overline{A} \cup \overline{B}$$

est un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^2$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 21 : Soit $f : \mathbb{R} \to \,]0,1[$ une fonction telle que $\lim_{t\to 0} f(t) = L > 0$, alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{f\big(x^2+y^2\big)} = 0\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $a \in \mathbb{R}^2$ un point stationnaire de f. Si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice hessienne $H_f(a)$ sont telles que

$$\lambda_1 \lambda_2 > 0\,,$$

alors a est un point d'extremum local de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et soient p_1 et p_2 ses polynômes de Taylor d'ordre 1 et 2 autour de $(x_0, y_0) = (0,0)$. Si p_1 est le polynôme nul, alors p_2 est aussi le polynôme nul.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = \big(f(x,y)\big)^2$. Si f n'est pas différentiable en $(x,y) = (0,0)$, alors g n'est pas différentiable en $(x,y) = (0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $A = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$. Alors le bord ∂A est l'ensemble vide.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors f admet un plan tangent en tout point de son graphe.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soient D_1 et D_2 les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ donnés par

$$D_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\} \quad \text{et} \quad D_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 9\right\}.$$

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors

$$\iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz < \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit D un sous-ensemble non-vide, ouvert et borné de $\mathbb{R}^n$. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors f atteint son maximum global sur D.

☐ VRAI ☐ FAUX