

Fonctions de classe C^p .

Déf Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^p sur E si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq p$ existent et sont continues sur E .

Rappel: Ex3 $f(x, y) = \sin(xy)$ est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

- [1] Si f est de classe C^1 sur $E \xRightarrow{\text{Thm 2}}$ f est dérivable sur E .
- [2] Si f est de classe C^2 sur $E \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j = 1 \dots n$ (Thm de Schwartz).
- [3] Si f est de classe C^p sur $E \Rightarrow$ on peut échanger l'ordre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre p .

Ex4.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{est de classe } C^1,$$

mais pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{0}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{0}) \quad (\text{Voir le cours 13}).$$

Def Matrice Hessienne: la matrice des dérivées partielles d'ordre 2.

pour $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $\subset \mathbb{R}^n$

$$\text{Hess}(f)(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\bar{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

Remarque. Si f est de classe C^2 sur E , on a $\text{Hess}(f)(\bar{a}) = \text{Hess}(f)(\bar{a})^T$
 (la matrice Hessienne est symétrique)

Ex3. $f(x,y) = \sin(xy)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

$$\text{Hess}(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ \cos(xy) - xy \sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{pmatrix}$$

(Voir le cours 13).

Comment vérifier si la fonction donnée est dérivable au point donné ?

Deux méthodes.

- 1 Si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continue en point donné $\Rightarrow$
 f est dérivable à ce point (Thm 2).

Rappel Ex 4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow$ On a calculé :
 (voir cours 13)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^5 - x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

Thm 2

$\Rightarrow f(x,y)$ est dérivable en $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y^4 x + 3y^2 x^3}{(x^2 + y^2)^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Important: Le fait qu'une ou plusieurs dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne soient pas continues en $\bar{a}$ n'implique pas que f n'est pas dérivable en $\bar{a}$ (à voir Ex 5).

- 2 Par la définition : (1) Si $\nabla f(\bar{a})$ n'existe pas $\xRightarrow{\text{Thm 1}}$ f n'est pas dérivable en $\bar{a}$.

(2) Si $\nabla f(\bar{a})$ existe, posons $r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) - \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle$

Alors : Si $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0 \Rightarrow f$ est dérivable en $\bar{a}$ (par déf)

Si $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \neq 0$ ou n'existe pas $\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $\bar{a}$ (Thm 1).

Ex 4. Méthode 2 : $\nabla f(0,0) = (0,0)$; $f(0,0) = 0$.

$$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_0 - \langle \underbrace{\nabla f(0,0)}_0, (x,y) \rangle = f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{r^3} = \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{\cos \varphi \sin^3 \varphi}_{\text{bornée}} = 0.$$

$\Rightarrow f(x,y)$ est dérivable en $(0,0)$.

Ex 5. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R} \\ 0 & , x = 0 \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

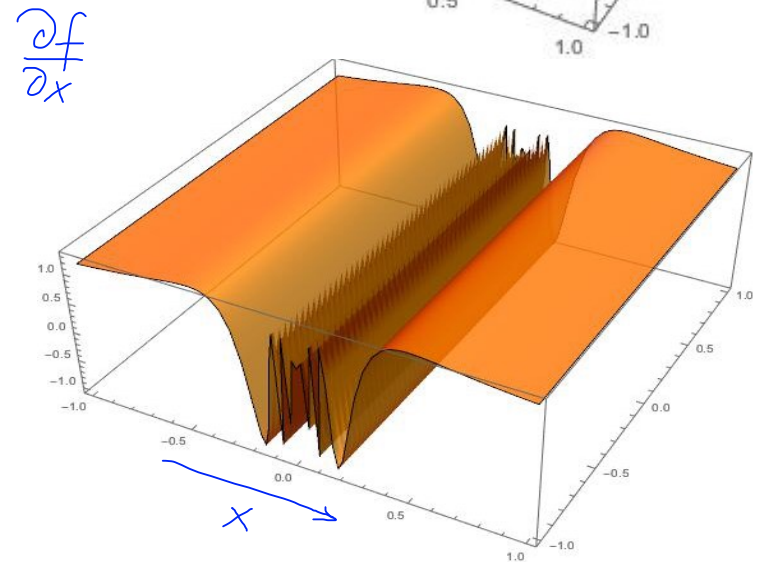
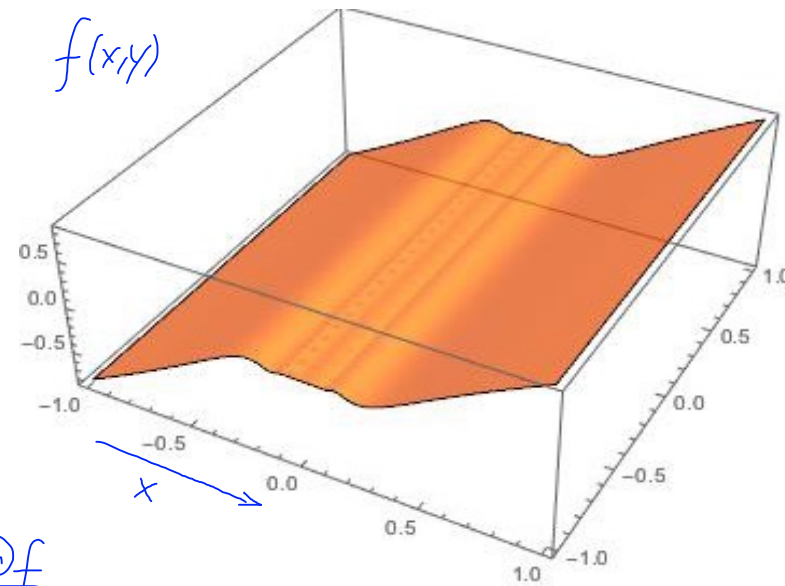
(1) $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$

(2) Dérivées partielles: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$
 $= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x=0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin \frac{1}{t} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \underbrace{\sin \frac{1}{t}}_{-1 \leq \dots \leq 1} = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{x \rightarrow 0 \Rightarrow 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'existe pas}} \right) \text{ n'existe pas!}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue si $x=0$; $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$



(3) Dérivabilité. Méthode 2. $f(x,y) - \underbrace{f(0,y_0)}_{0''} - \underbrace{\langle \nabla f(0,y_0), (x, y-y_0) \rangle}_{(0,0)} = r(x,y) = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$ -136-

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{|r(x,y)|}{\|(x,y) - (0,y_0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{x^2 |\sin(\frac{1}{x})|}{\underbrace{\sqrt{x^2 + (y-y_0)^2}}_{\geq 0}} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |\sin(\frac{1}{x})|}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| \underbrace{|\sin(\frac{1}{x})|}_{\text{borné}} = 0.$$

$\Rightarrow f(x,y)$ est dérivable en $(0, y_0) \quad \forall y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

Mais $f(x,y)$ n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque. Le plan tangent au graphique d'une fonction est défini seulement pour les fonctions dérivables au point donné [DZ: Annexe E42].

Rappel: Si $f(x,y)$ est dérivable en $(x_0, y_0) \Rightarrow$ le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est défini par l'équation:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

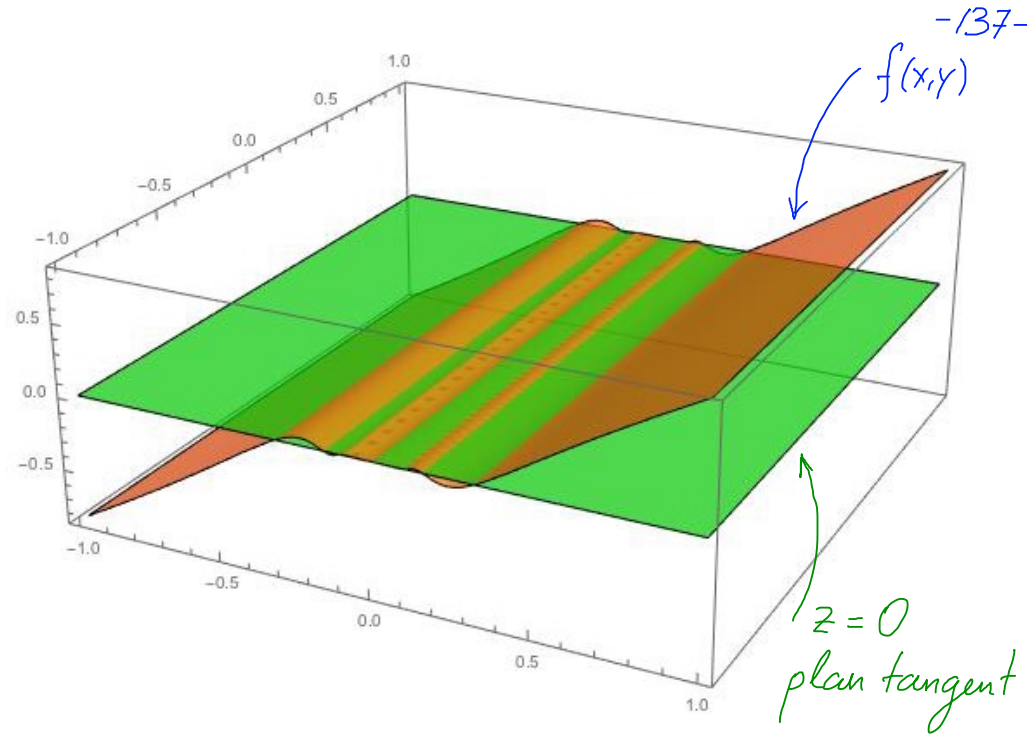
Si $f(x,y)$ n'est pas dérivable en (x_0, y_0) , ce plan n'est pas un plan tangent; même si le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ existe.

Le plan tangent n'est pas défini dans ce cas.

Ex 5

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

f est dérivable en $(0, y_0)$. $\nabla f(0, y_0) = \vec{0}$
Le plan tangent en $(0, y_0, f(0, y_0))$ est
 $z = 0 + \langle \nabla f(0, y_0), (x, y - y_0) \rangle = 0$



Ex 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f n'est pas dérivable en $(0,0)$ (Voir le cours 13),
mais $\nabla f(0,0) = (0,0)$

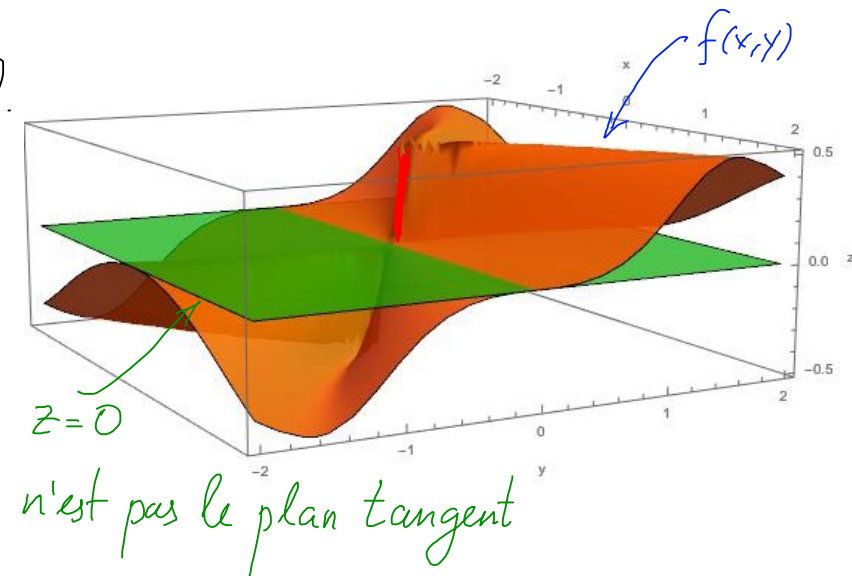
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot 0}{t(t^4 + 0)} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t^3}{t(0 + t^6)} = 0.$$

On peut écrire l'équation d'un plan:

$$z = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = \langle (0,0), (x,y) \rangle = 0.$$

Ce n'est pas un plan tangent au graphique $z = f(x,y)$ en $(0,0)$

Le plan tangent n'est pas défini en ce point.



Ex 6. Fonction continue mais pas dérivable en un point.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 |\cos^4 \varphi \sin \varphi|}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} r \overbrace{|\cos^4 \varphi \sin \varphi|}^{\leq 1} = 0.$$

Dérivabilité: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cdot 0}{t(t^2+0)^2} = 0.$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{t(0+t^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0).$$

Méthode 2 Si $f(x,y)$ était dérivable en $(0,0)$, alors $r(x,y) = \overbrace{f(x,y) - f(0,0)}^{=0} - \langle \overbrace{\nabla f(0,0)}^{=0}, (x,y) \rangle =$
 $= f(x,y) = \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}$ serait telle que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$

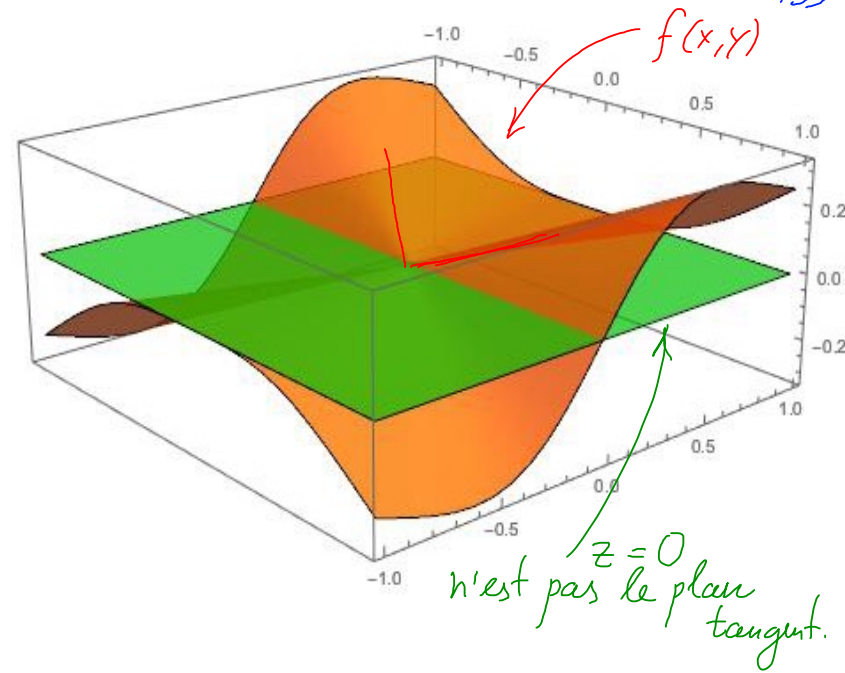
$$\text{Or on a: } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$$

$$a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^4} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{2}{k^2}\right)^{5/2}} = \frac{1}{(2)^{5/2}} \quad ; \quad b_k = \left(0, \frac{1}{k}\right) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^5}} = 0.$$

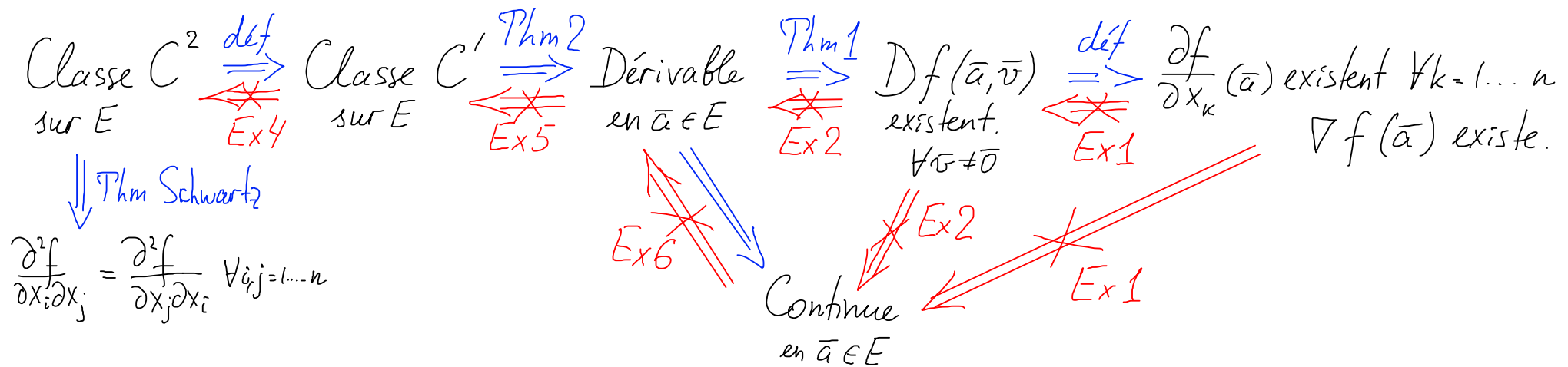
$\Rightarrow$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|}$ n'existe pas

$\Rightarrow f(x,y)$ n'est pas dérivable en $(0,0)$.

En particulier, le plan $z=0$ n'est pas le plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ en $(0,0)$.



Résumé Soit $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$



Réurrence forte. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$

Supposons que (1) $P(n_0)$ est vraie

(2) $\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)\}$ impliquent $P(n+1)$
pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Ex1. Proposition: $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, n est un produit des facteurs premiers.

Dém: (par récurrence forte)

(1) Base $P(2)$: $2 = 2$ est premier $\Rightarrow P(2)$ est vraie.

(2) Hérédité $\{P(2), \dots, P(n)\} \stackrel{??}{\Rightarrow} P(n+1)$

Considérons $(n+1) \in \mathbb{N}$. Si $(n+1)$ est premier $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

Si non, $(n+1) = m \cdot k$ où $m, k \in \mathbb{N}$ sont tels que $2 \leq m, k < n+1$

Alors $P(m)$ et $P(k)$ sont vraies $\Rightarrow m$ et k sont des produits des facteurs premiers.

$\Rightarrow (n+1) = m \cdot k$ est aussi un produit des facteurs premiers. $\Rightarrow P(n+1)$ est vraie.

$\Rightarrow$ Par la récurrence forte, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 2, n \in \mathbb{N}$.



Résumé : Réurrence.

(1) Réurrence simple: $P(n_0)$ vraie, $P(n) \Rightarrow P(n+1) \forall n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$

(2) Réurrence généralisée: $P(n_0), P(n_0+1) \dots P(n_0+k)$ vraies
 $\{P(n), P(n+1) \dots P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1) \forall n \geq n_0 \Rightarrow P(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$.
 k fixé

(version périodique : $P(n) \Rightarrow P(n+k+1)$, k fixé, $\forall n \geq n_0$)

(3) Réurrence forte. $P(n_0)$ vraie; $\{P(n_0), P(n_0+1) \dots P(n)\} \Rightarrow P(n+1) \Rightarrow P(n)$ vraie $\forall n \geq n_0$.
 $\forall n \geq n_0$