

Chapitre 3. Fonction réelles de plusieurs variables réelles:

-81-

limites et continuité.

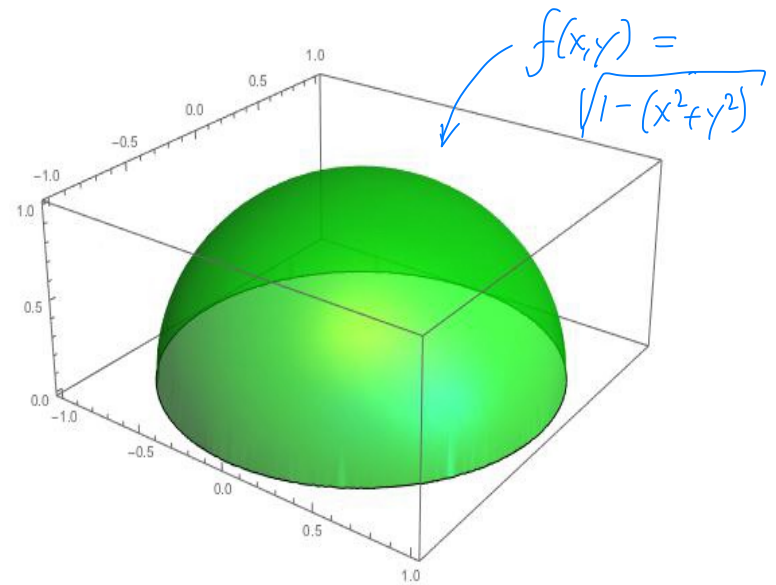
§3.1. Définitions et exemples.

Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans $\mathbb{R}$.
 E est le domaine de définition de f , et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

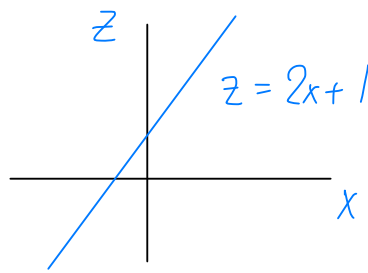
Ex 1 $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
disque de rayon 1 et centre (0,0).

$$z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$
$$\begin{cases} z^2 = 1 - (x^2 + y^2) \\ z \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

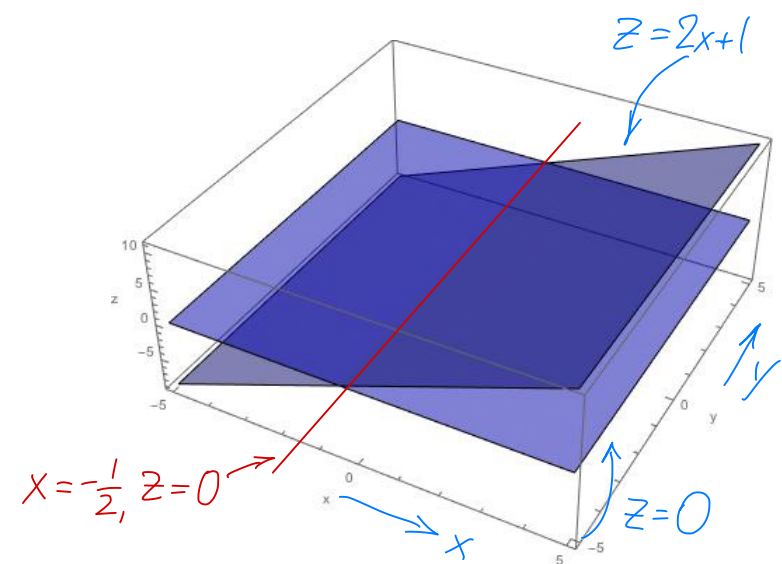
$\Rightarrow$ l'hémisphère de rayon 1
et de centre $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.



Ex 2. $f(x, y) = 2x + 1$
 $z = 2x + 1$



Si $z = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0$
 $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$



Ex 3. $f(x, y) = ax + by + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$

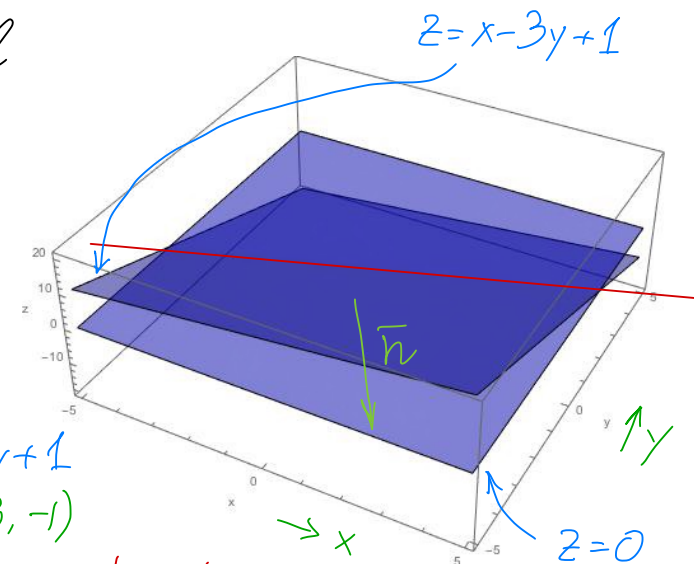
Comment visualiser cette fonction?

Soit $c = 0$. Considérons le graphique de f : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by = z\} =$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by - z = 0\} =$

$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (a, b, -1) \rangle = 0\} =$ le plan orthogonal
à $\bar{n} = (a, b, -1)$ et contenant $(0, 0, 0)$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ arbitraire $\Rightarrow$ Il faut monter le plan
par c unités le long de l'axe z pour obtenir
le graphique de $f(x, y) = ax + by + c$:
le plan orthogonal à $\bar{n} = (a, b, -1)$
qui contient $(0, 0, c)$.

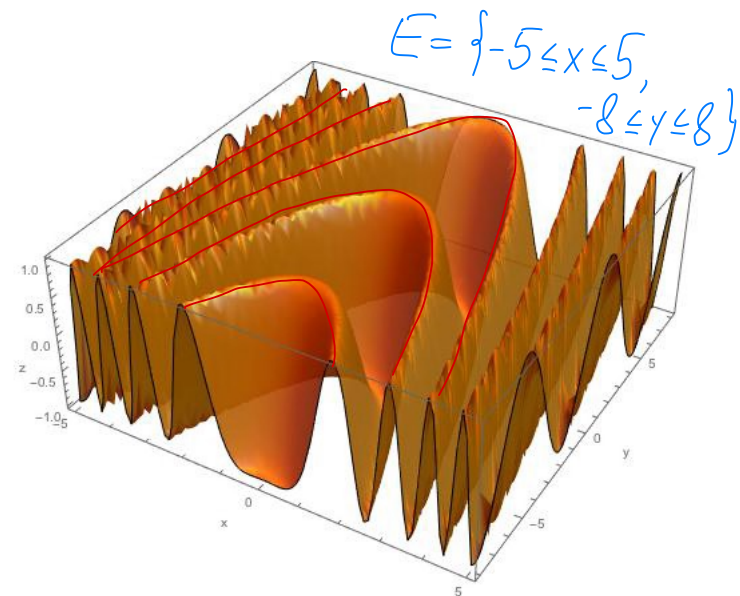
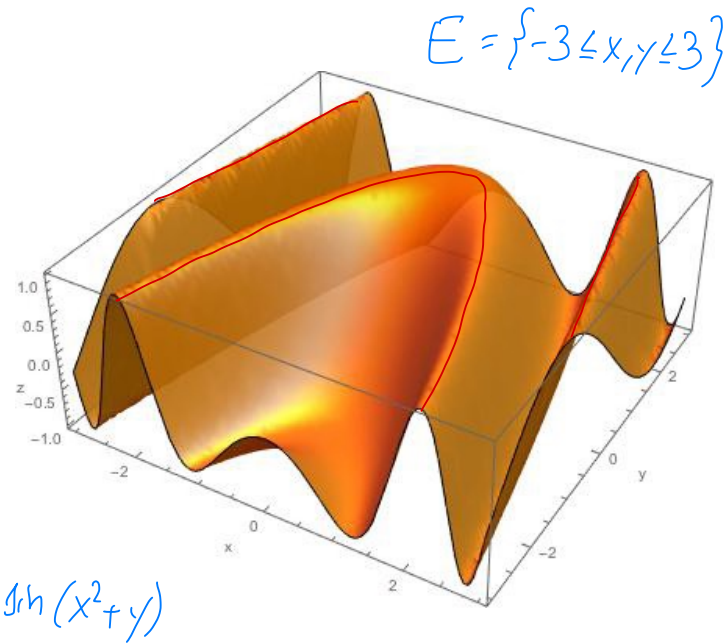
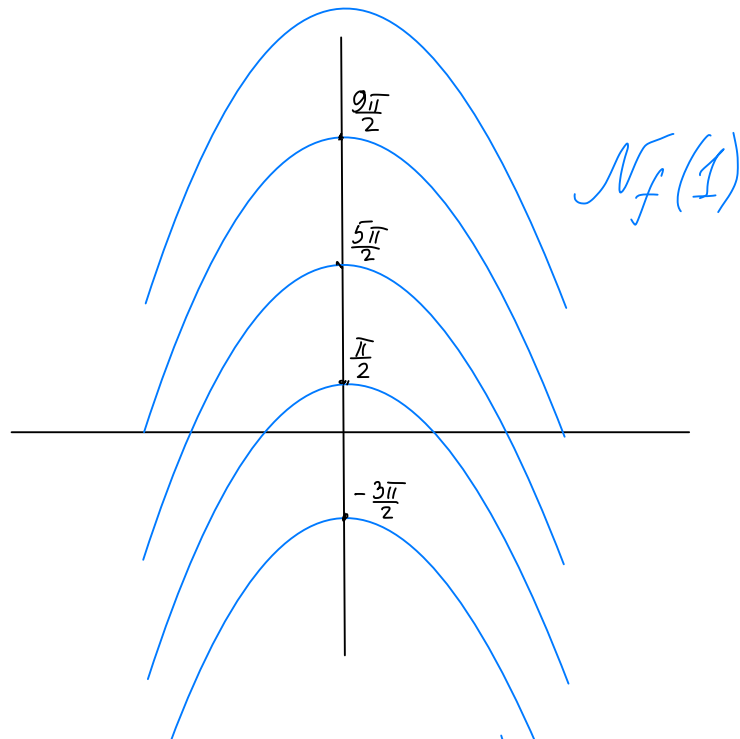


$z = x - 3y + 1$
 $\bar{n} = (1, -3, -1)$
Si $z = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Déf. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ et $c \in f(E)$. Alors $\mathcal{N}_f(c) = \{ \bar{x} \in E : f(\bar{x}) = c \} \subset E$ est appelé *l'ensemble de niveau* de f pour $c \in \mathbb{R}$ -83-

Ex 4. $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$; $E = \mathbb{R}^2$
 $f(E) = [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_f(1) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2 + y) = 1 \} = \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \} = \\ &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$



§3.2. Limites et continuité.

-84-

Déf Une fonction *définie au voisinage de $\bar{x}_0$* (mais pas nécessairement en $\bar{x}_0$)

$[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\bar{x}_0\}]$ admet pour *limite* le nombre réel ℓ lorsque $\bar{x}$ tend vers $\bar{x}_0$ si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que pour tout $\bar{x} \in E$ et $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$, on a $|f(\bar{x}) - \ell| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \ell$.

Déf. Soit $\bar{x}_0 \in E$ un point intérieur de E . Alors $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $\bar{x} = \bar{x}_0$ $\stackrel{\text{dét}}{\iff} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$.

Ex 1. $f(x, y) = x + y$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + y) = x_0 + y_0$

Dém. Soit $\varepsilon > 0$. $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| \leq$ *inégalité triangulaire*

$$\leq \underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{\substack{\geq 0 \\ \geq |x-x_0|}} + \underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{\substack{\geq 0 \\ \geq |y-y_0|}} = 2 \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \leq 2\delta = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Alors la fonction $f(x, y) = x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$



Ex 2. $f(x, y) = x \cdot y$ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Dém: Si $x_0 = 0 \Rightarrow$ exercice. Supposons que $x_0 \neq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |x \cdot y - x_0 \cdot y_0| \stackrel{\Delta}{=} |(x - x_0)y + x_0(y - y_0)| \leq |x - x_0||y| + |y - y_0||x_0|$$

$$|y - y_0| \cdot |x_0| \leq \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\leq \delta} \cdot |x_0| \stackrel{\text{on veut}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|} \quad (x_0 \neq 0).$$

$$|x - x_0||y| \leq \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\leq \delta} \cdot \underbrace{|y|}_{\leq |y_0| + \delta} \leq \delta(|y_0| + \delta) \leq \delta(|y_0| + 1) \stackrel{\text{on veut}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}$$

on choisit $\delta < 1$

$$\Rightarrow \text{Si } \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1\right) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2: \|(x, y) - (x_0, y_0)\| \leq \delta, x_0 \neq 0$.

$$\Rightarrow \text{par la définition de la limite, } \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$$



Conclusion: Les fonctions $f(x, y) = x + y$ et $f(x, y) = x \cdot y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes.

-86-

Thm. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0 \iff$ pour toute suite d'éléments $\{\bar{a}_k\}$ de $\{\bar{x} \in E : \bar{x} \neq \bar{x}_0\}$, qui converge vers $\bar{x}_0$, la suite $\{f(\bar{a}_k)\}$ converge vers l .

$$\left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \right) \iff \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = l \text{ pour toute suite } \{\bar{a}_k\} \subset E \setminus \{\bar{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0 \right)$$

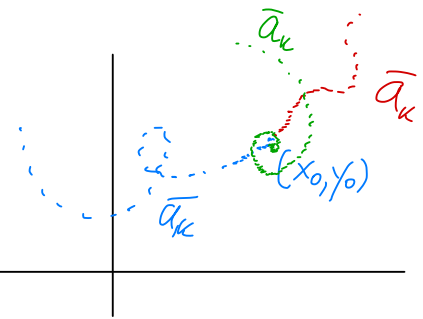
P Q

Dém: $(\Rightarrow) P \Rightarrow Q$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon.$$

Si on a $\{\bar{a}_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0 \Rightarrow$ pour $\delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|\bar{a}_k - \bar{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{a}_k) - l| \leq \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = l.$

le même δ



$(\Leftarrow)$ *par contraposée* : $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Supposons que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) \neq l \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists \bar{x}_\delta : \|\bar{x}_\delta - \bar{x}_0\| \leq \delta$ et $|f(\bar{x}_\delta) - l| > \varepsilon$.

On peut choisir $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow \exists \bar{x}_k \in E : \|\bar{x}_k - \bar{x}_0\| \leq \frac{1}{k}$ et $|f(\bar{x}_k) - l| > \varepsilon$

$\Rightarrow$ on obtient la suite $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0$, mais $|f(\bar{x}_k) - l| > \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}_+$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{x}_k) \neq l$$



Opérations algébriques sur les limites.

-87-

Soient f, g deux fonctions : $E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l_1$ et $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l_2$.

Alors :

- (1) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 - (2) $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 \cdot l_2$
 - (3) Si $l_2 \neq 0$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g} \right)(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$
- } par la caractérisation à partir des suites.

Conclusion: Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition.

Remarque. La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$: il suffit de trouver 2 suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ d'éléments de E , convergentes vers $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, et telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k)$$

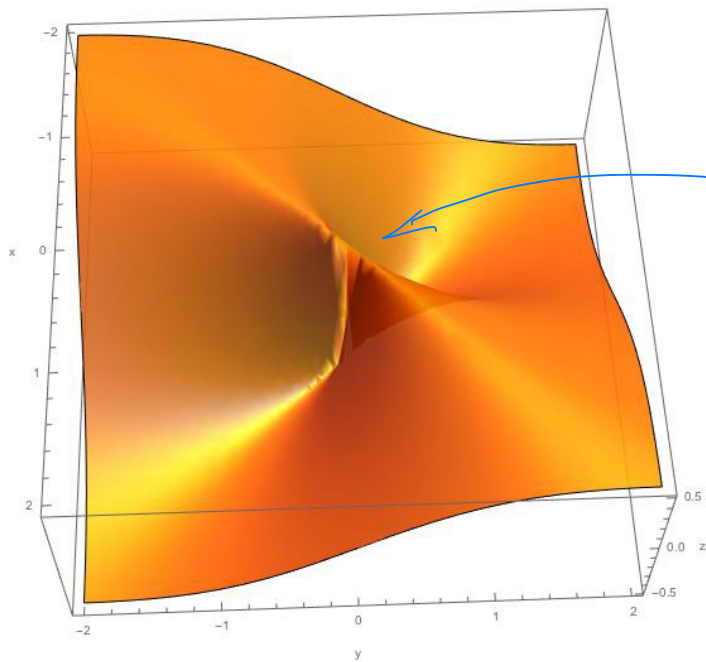
-88-

Ex. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$

Considérons $\bar{a}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0,0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2}$

$\bar{b}_k = \left(\frac{1}{k}, 0\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (0,0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2} + 0} = 0$ #

$\Rightarrow$ Par la caractérisation à partir des suites, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

pas de limite

lorsque $(x,y) \rightarrow (0,0)$