Rappel:

Ex 2. Dans un groupe de n personnes ($n \geq 2$) il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances dans le groupe.

Démonstration: par la disjonction des cas et la méthode des tiroirs

Cas 1: Chacun connait quelqu'un dans le groupe.

$\Rightarrow$ Le nombre K de connaissances pour chacun est entre 1 en $(n-1)$

$\Rightarrow 1 \leq K \leq n-1 \Rightarrow (n-1)$ possibilités pour n personnes.

Par le principe des tiroirs, il existe $\left\lceil \frac{n}{n-1} \right\rceil = 2$ personnes avec le même nombre de connaissances.

Cas 2. Il existe quelqu'un sans connaissances dans le groupe.

$\Rightarrow$ Le nombre K de connaissances pour chacun est entre 0 en $(n-2)$

$\Rightarrow 0 \leq K \leq n-2 \Rightarrow (n-1)$ possibilités pour n personnes.

Par le principe des tiroirs, il existe $\left\lceil \frac{n}{n-1} \right\rceil = 2$ personnes avec le même nombre de connaissances.

$\blacksquare$

Rappel: Sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\left[\begin{array}{l} (1)\ E = \emptyset \\ (2)\ E \neq \emptyset \text{ et pour chaque point } \bar{x} \in E \\ \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x}, \delta) \subset E \end{array}\right.$

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert.

Déf. (Adhérance) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée l'adhérance de E.

Notation: $\bar{E}$ est l'adhérance de E dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque. $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Longleftrightarrow$ $E = \bar{E}$ (par déf).

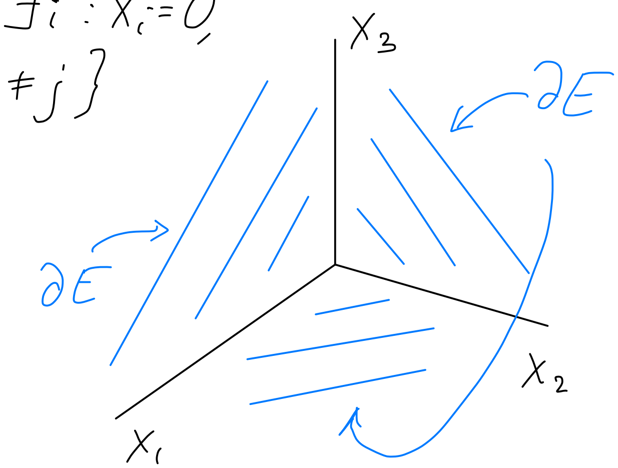
Déf. $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide, $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de frontière de E si toute boule ouverte de centre $\bar{x}$ contient au moins un point de E et au moins un point de CE.

L'ensemble des points frontières de E est la frontière de E

Notation: ∂E

Ex 1. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ i = 1 \dots n\}$ ouvert $\Rightarrow \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0,\ x_j \geq 0,\ i \neq j\}$

$\bar{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1 \dots n\}$



Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors:

(1) $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$ (par déf)

(2) $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$ (exercice : $\mathring{E} \cup \partial E$ est fermé, et $\mathring{E} \cup \partial E \supset E$ minimal fermé).

l'intérieur de E

(3) $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E}$

(4) $\partial \emptyset = \emptyset$, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$ (déf).

Pourquoi faut-il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$?
La topologie de $\mathbb{R}^n$ est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

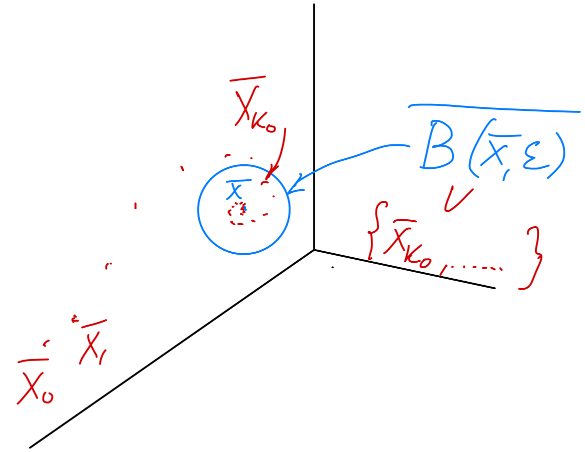
Déf Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$f : k \to \bar{x}_k = (x_{1_k}, x_{2_k} \dots x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

$\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Déf. $\{\overline{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est convergente et admet pour limite $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0$, $\|\overline{x}_k - \overline{x}\| \leq \varepsilon$.

$$\left(\Longleftrightarrow \overline{x}_k \in \overline{B(\overline{x}, \varepsilon)} \right)$$



Notation: $\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = \overline{x}$

Remarque. $\lim_{k \to \infty} \overline{x}_k = \overline{x} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \lim_{k \to \infty} x_{j,k} = x_j$ pour tout $j = 1 \ldots n$; $\overline{x} = (x_1 \ldots x_n)$

Idée: $$\underbrace{\|\overline{x}_k - \overline{x}\|}_{\forall k \geq k_0 \quad \leq \varepsilon} = \left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_{j,k} - x_j)^2}_{\leq \varepsilon_j \ \forall j = 1 \ldots n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

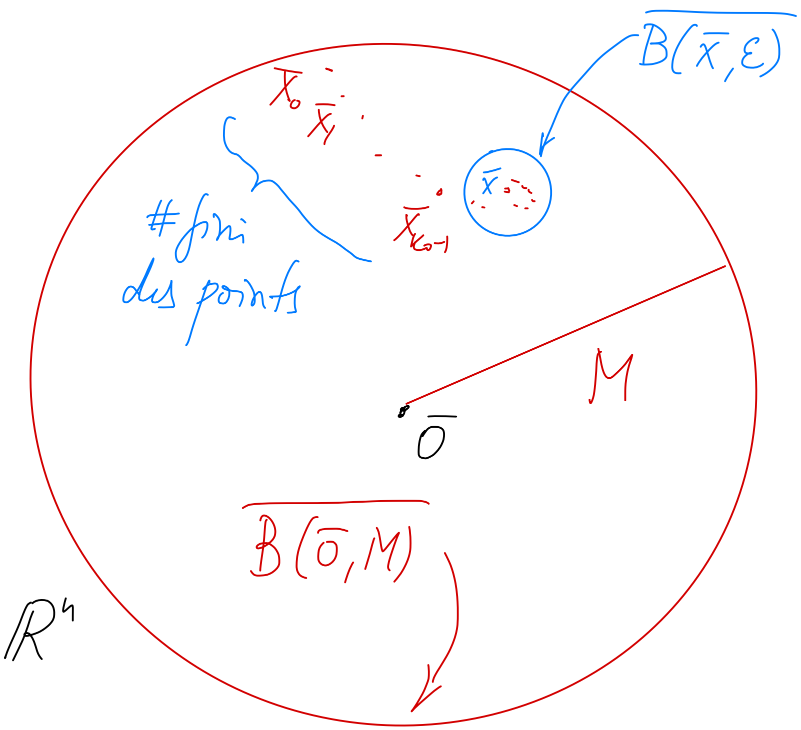
Propriétés: (1) La limite d'une suite $\{\overline{x}_k\}$, si elle existe, est unique.

(2) Toute suite convergente $\{\overline{x}_k\}$ est bornée.

$\left(\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \right.$ est contenue dans une boule fermé $\overline{B(\overline{0}, M)}$, $M > 0$ $\left. \right)$.

$$\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists M > 0 : \|\bar{x}_k\| \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$$



(3) <u>Thm Bolzano-Weierstrass :</u>

De toute suite bornée $\{\bar{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

[DZ §11.2.16].

Le lien entre les suites convergentes dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$:

<u>Thm:</u> $\underbrace{\text{(Un sous-ensemble non-vide } E \subset \mathbb{R}^n \text{ est fermé)}}_{P} \iff$

$\underbrace{\text{(toute suite } \{\bar{x}_k\} \subset E \text{ d'éléments de } E \text{ qui converge, a pour limite un élément de } E.)}_{Q}$

Dém: $\Rightarrow$) par absurde. P et $\neg Q \Rightarrow$ absurde

Soit $\bar{x} = \lim_{k\to\infty} \bar{x}_k$, $\bar{x}_k \in E$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Supposons par absurde que $\bar{x} \notin E$, $\overbrace{E \text{ est fermé}}^{Q}$.

$\Rightarrow \bar{x} \in CE$, où CE est ouvert dans $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset CE \Rightarrow \underbrace{\{\bar{x}_k \ \forall k \in \mathbb{N}\}}_{\in E} \cap \underbrace{B(\bar{x}, \delta)}_{\subset CE} = \emptyset$

D'autre côté, $\lim_{k\to\infty} \bar{x}_k = \bar{x} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0$, $\bar{x}_k \in \overline{B(\bar{x}, \frac{\delta}{2})} \subset B(\bar{x}, \delta)$

$\Rightarrow$ absurde

Alors $P \Rightarrow Q$.

$\Leftarrow$) par contraposée : $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Supposons que E n'est pas fermé. $\Rightarrow CE$ n'est pas ouvert.

$\Rightarrow \exists y \in CE : \forall k \in \mathbb{N}_+ \ B(\bar{y}, \frac{1}{k}) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \exists \bar{y}_k \in B(\bar{y}, \frac{1}{k})$ tel que $\bar{y}_k \in E$

$\Rightarrow$ On a obtenu une suite $\{\bar{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}_+} \subset E$, et $\lim_{k\to\infty} \bar{y}_k = \bar{y} \in CE \Rightarrow$

contradiction avec Q

Alors $Q \Rightarrow P$.

$\blacksquare$

Remarque. Pour construire l'adhérance $\bar{E}$ d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de E.
[Voir DZ § 11.3.15].

Déf. Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné.

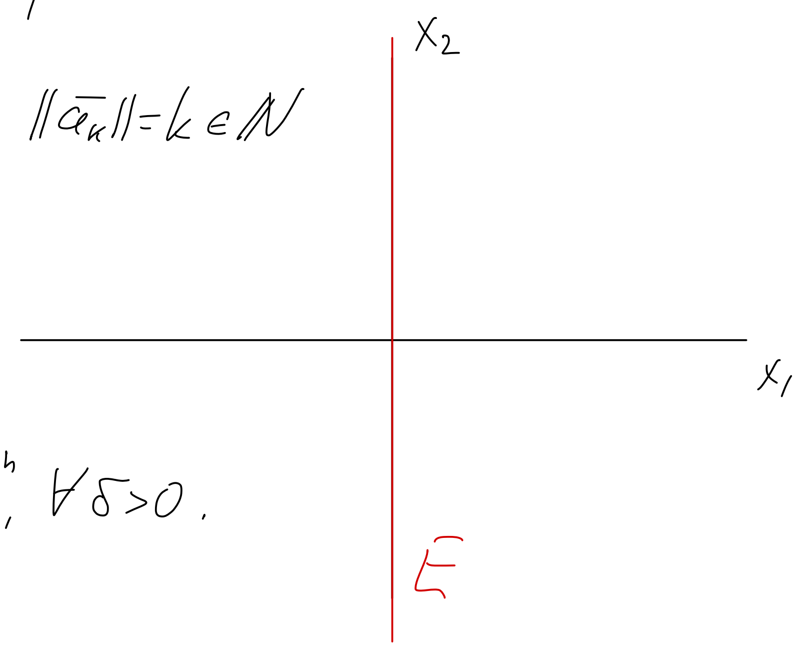
Ex 1. Boule fermé
$$\left.\begin{array}{l} \overline{B(\bar{x},\delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \le \delta\} \text{ fermé} \\ \overline{B(\bar{x},\delta)} \subset \overline{B(\bar{0}, \|\bar{x}\|+\delta)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{compact.}$$

Ex 2. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \ge 2,\ x_1 = 0\}$ - fermé, mais pas borné

$\{\bar{a}_k = (0, k, 0.0)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$, les normes $\|\bar{a}_k\| = k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow E$ n'est pas borné.

$\Rightarrow E$ n'est pas compact.



Ex 3. $B(\bar{x}, \delta)$ n'est pas compact $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $\forall \delta > 0$.
borné, pas fermé.

Thm (Heine-Borel-Lebesgue) Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Longleftrightarrow$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$

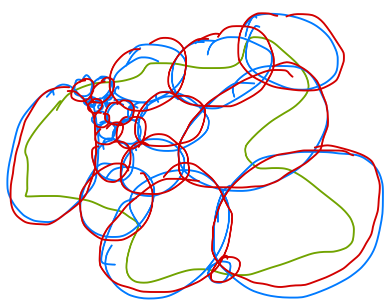
($E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $\forall i \in I$ - un recouvrement de E)

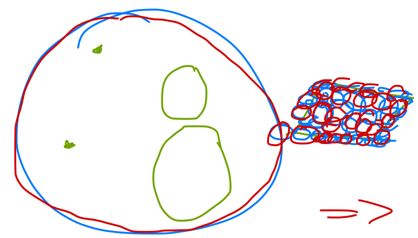
on peut extraire une famille finie d'ensembles que forment un recouvrement de E.

($E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ $\quad A_i \subset \mathbb{R}^n$ ouverts $\Rightarrow \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$)

peut être innombrable !

E compact $\subset \mathbb{R}^n$



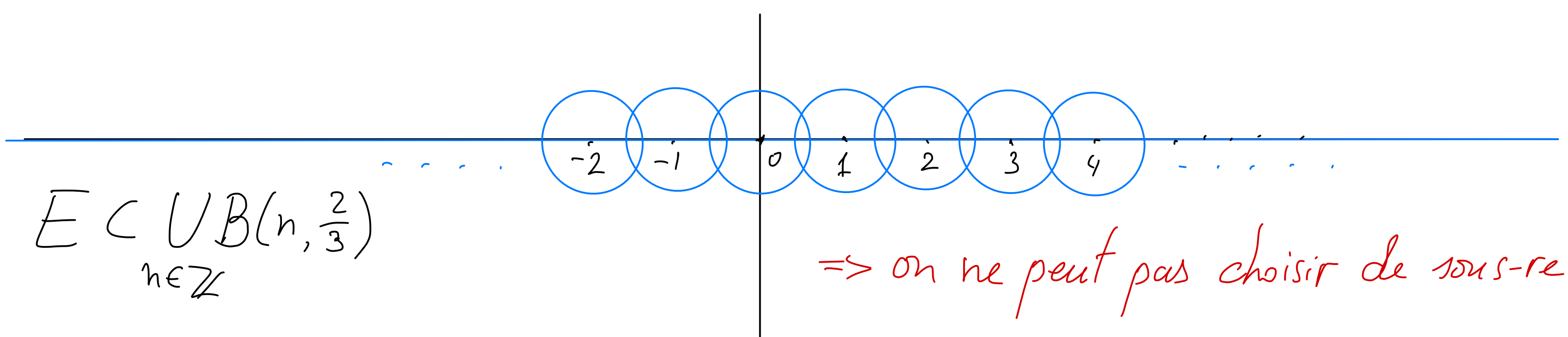


$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i$

$\Rightarrow E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$

Ne marche pas si E n'est pas compact !!!

Ex 1. Une droite dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ est fermé, pas borné $\Rightarrow$ pas compact.

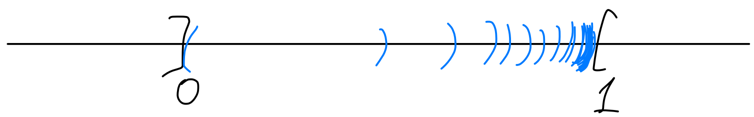


$E \subset \mathbb{R}^2$

$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B(n, \frac{2}{3})$

$\Rightarrow$ on ne peut pas choisir de sous-recouvrement fini.

Ex 2. Intervalle ouvert $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ => n'est pas fermé => n'est pas compact.



$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+}]0, \frac{i}{i+1}[$ - un recouvrement de E

=> on ne peut pas choisir un sous-recouvrement fini.

Exemples des sous-ensembles dans $\mathbb{R}^n$: ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé ?

Ex 1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > \sin(x+y) \geq -2\}$.

=> $\sin(x+y) \geq -2$ toujours : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ✓

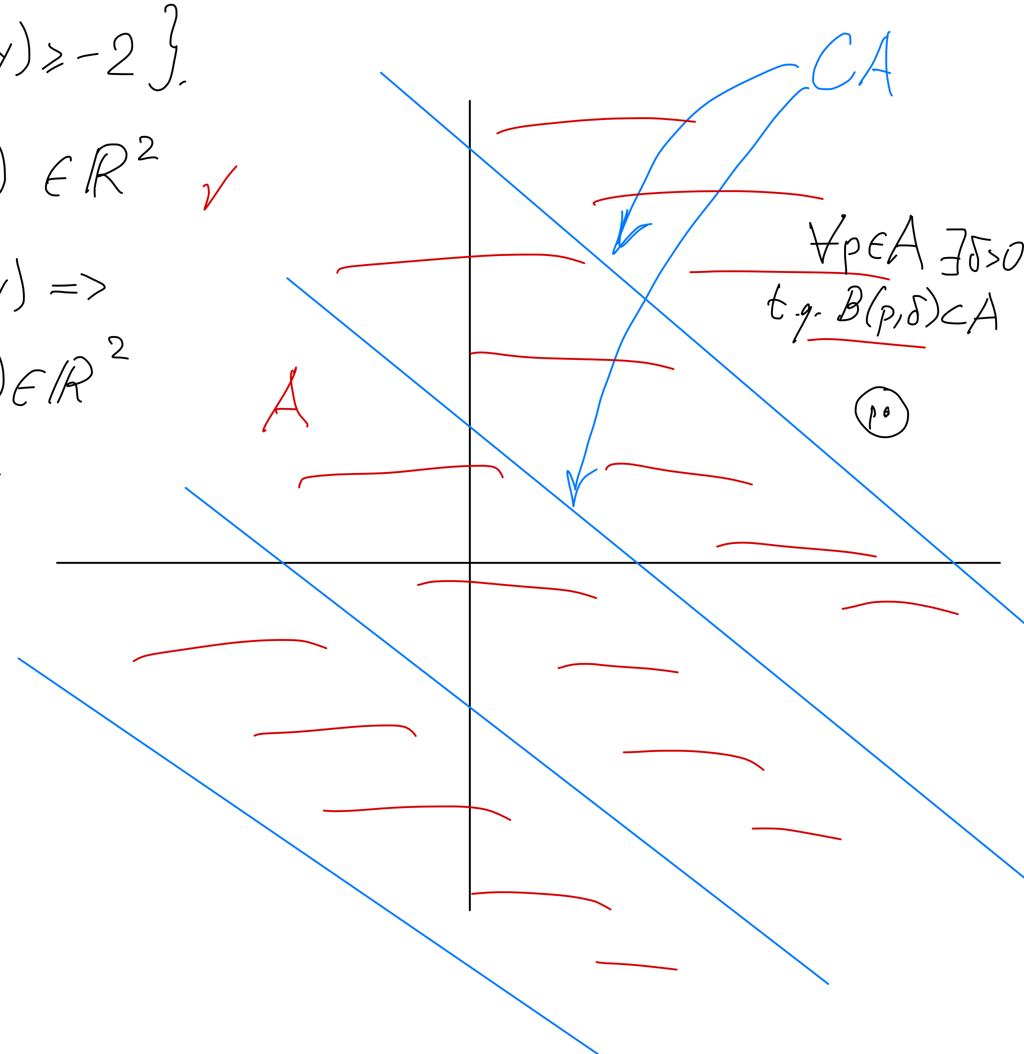
$1 > \sin(x+y)$; parfois $\sin(x+y)$ =>

=> il faut enlever les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\sin(x+y) = 1 \iff x+y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

=> $y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

=> A est ouvert.



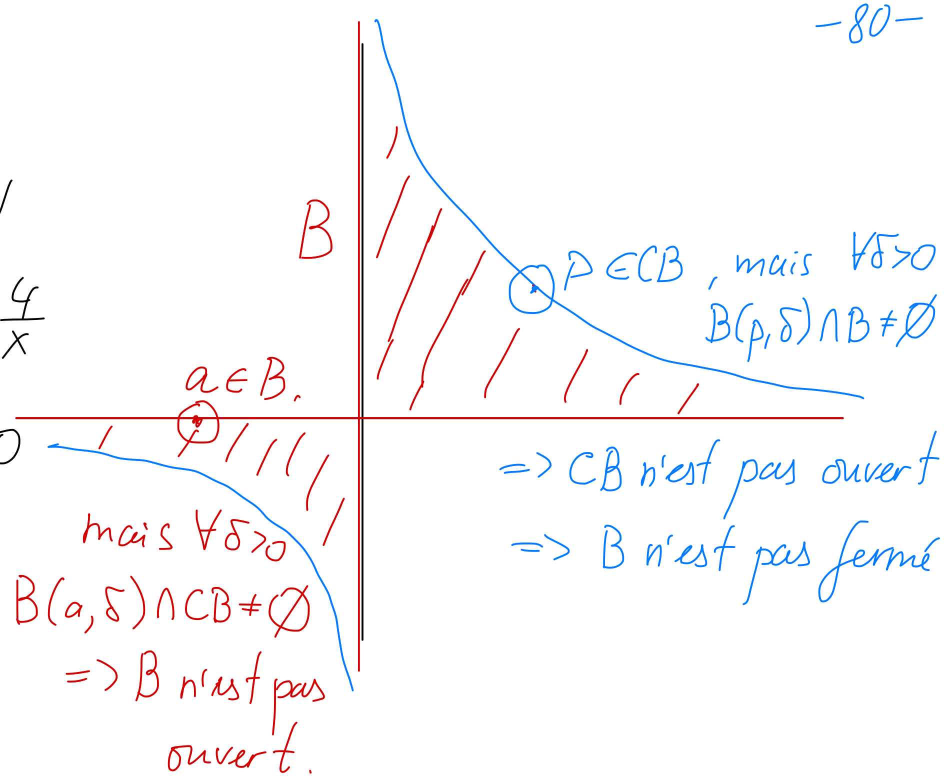
Ex 2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{xy} < 2\}$.

$\sqrt{xy}$ existe $\Rightarrow xy \geq 0$; aussi $xy < 4$

(1) $x > 0 \Rightarrow y \geq 0$ et $xy < 4 \Leftrightarrow y \geq 0, \; y < \frac{4}{x}$

(2) $x < 0 \Rightarrow y \leq 0$ et $xy < 4 \Leftrightarrow y > \frac{4}{x}, \; y \leq 0$

(3) $x = 0 \Rightarrow y$ arbitraire



$\Rightarrow$ B n'est ni ouvert, ni fermé