Chapitre 2. Espace $\mathbb{R}^n$.

§2.1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

Déf $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de tous les n-tuples ordonnés de nombres réels.

$$\bar{x} = (x_1, \ldots x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} ; \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ un point (élément)}, \ \bar{x} = (x_1 \ldots x_n).$$

$\mathbb{R}^n$ est muni des 2 opérations

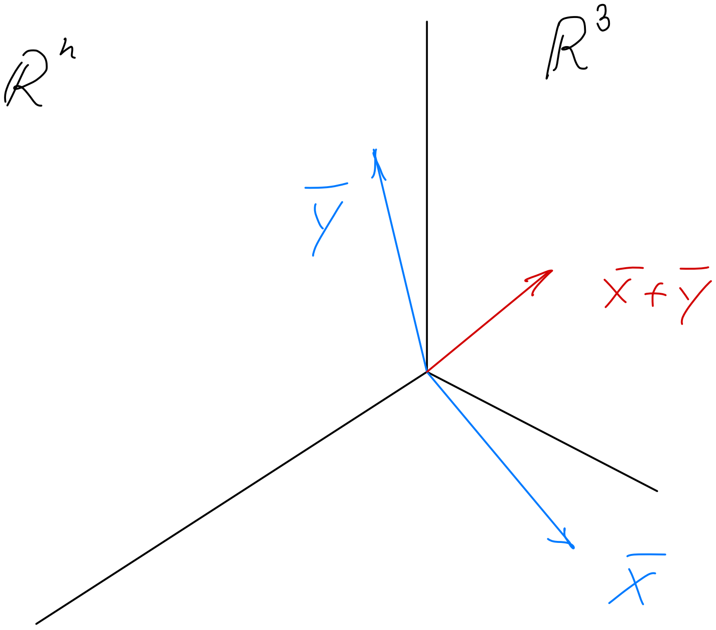
(1) $+$: $\bar{x} = (x_1 \ldots x_n)$, $\bar{y} = (y_1 \ldots y_n) \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \overset{\text{déf}}{=} (x_1 + y_1, \ldots \ x_n + y_n)$

(2) multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = (x_1 \ldots x_n) \Rightarrow \lambda \cdot \bar{x} \overset{\text{déf}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2 \ldots \lambda x_n).$$

Les opérations satisfont les propriétés :

$$\begin{cases} (\lambda_1 \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{x}) = \lambda_2 (\lambda_1 \bar{x}) & \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \\ 1 \bar{x} = \bar{x} & \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \bar{x} = \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x} & \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \\ \lambda (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} & \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Une base : $\{\bar{e}_i = (0, 0, \ldots \overset{i}{1}, 0, 0.)\}_{i=1}^{n} \Rightarrow \bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$

$\forall i = 1 \ldots n$

Alors $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1 \dots x_n)$.

On introduit le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

Déf $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \overset{déf}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$ et la norme euclidienne:

Déf $\|\bar{x}\| \overset{déf}{=} (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

Propriétés de la norme euclidienne:

(1) $\|\bar{x}\| \geq 0$ et $\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = (0, 0, \dots 0)$

(2) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda \cdot \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$

(3) Cauchy-Schwartz: $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Dém: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i \lambda + y_i)^2}_{\lambda^2 x_i^2 + 2\lambda x_i y_i + y_i^2} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{a} \lambda^2 + 2\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}_{b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{c} \geq 0$$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ le discriminant de cette équation quadratique en λ est ≤ 0.

$$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}_{|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|^2} - 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{\|\bar{x}\|^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{\|\bar{y}\|^2} \leq 0.$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}\|^2 \|\bar{y}\|^2 \geq |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle|^2 \overset{\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\| \geq 0}{\Longrightarrow} \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| \geq |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$ ▨

(4) Inégalité triangulaire : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

(3) $\Rightarrow$ (4)

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle \qquad 2\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \leq 2\|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$$

$$\begin{array}{ccccc} & \| & \wedge\!\!\!/ & \| & \\ (\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|)^2 = & \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle & + 2\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| & + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle & \end{array}$$

Cauchy-Schwartz

(5) Une autre inégalité triangulaire: $\|\bar{x}-\bar{y}\| \geq |\|x\|-\|y\||$ ((4) $\Rightarrow$ (5) Exercice: [DZ] § 11.1.3).

Déf. L'expression $\|\bar{x}-\bar{y}\| = d(x,y)$ est appelée la distance entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $\mathbb{R}^n$.

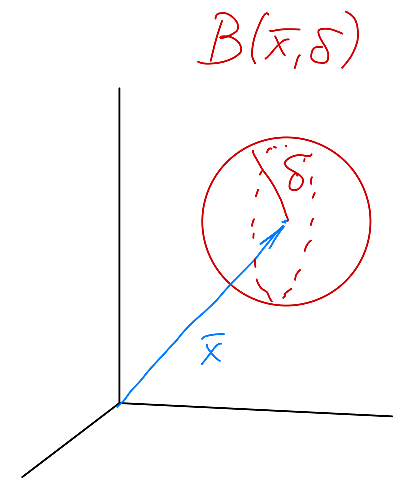
Alors: (1) $d(\bar{x},\bar{y}) = d(y,x)$

(2) $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$ (propriété (1) de la norme)

(3) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{R}^n$

$\|\bar{x}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$ L'inégalité triangulaire.

§ 2.2. Topologie dans $\mathbb{R}^n$. $\quad n \geq 1$



Déf. Pour tout $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, soit
$$B(\bar{x},\delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < \delta\}.$$
Alors $B(\bar{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *la boule ouverte* de centre $\bar{x}$ et rayon δ.

Déf. $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\left[\begin{array}{l} (1)\ E = \emptyset,\ \text{soit} \\ (2)\ E \neq \emptyset \text{ et pour tout } \bar{x} \in E \\ \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x},\delta) \subset E \end{array}\right.$

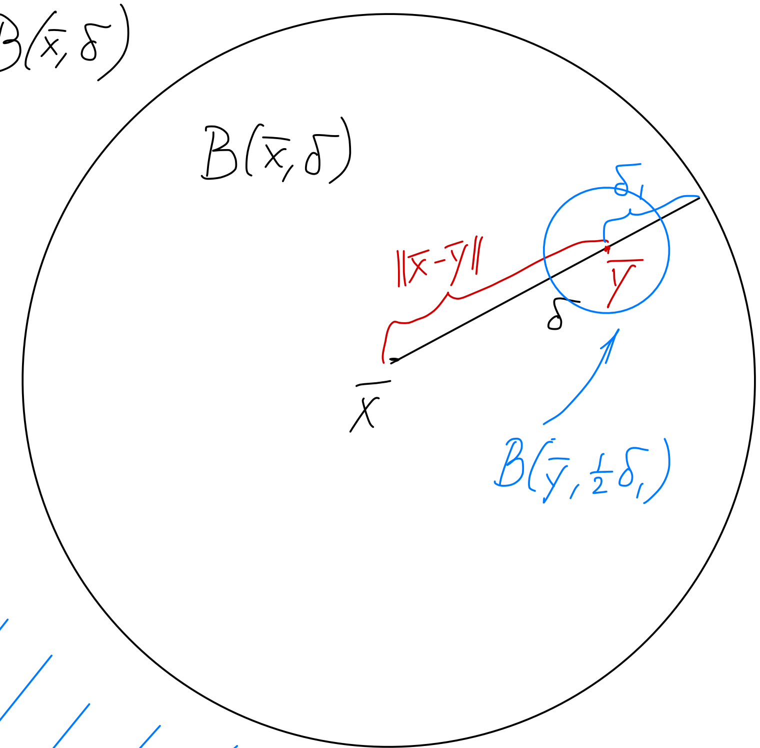
Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors $\bar{x} \in E$ est *un point intérieur* de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar{x},\delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs est appelé *l'intérieure* de E. Notation: $\mathring{E}$.

Clairement, $\mathring{E} \subset E$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\Longleftrightarrow$ $\mathring{E} = E$.

Ex 1. La boule ouverte $B(\bar{x},\delta) = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < \delta\}$ est un sous-ensemble ouvert.

Soit $\bar{y} \in B(\bar{x},\delta) \Rightarrow B(\bar{y}, \tfrac{1}{2}\underbrace{(\delta - \|\bar{x}-\bar{y}\|)}_{\delta_1}) = B(\bar{y}, \tfrac{1}{2}\delta_1) \subset B(\bar{x},\delta)$



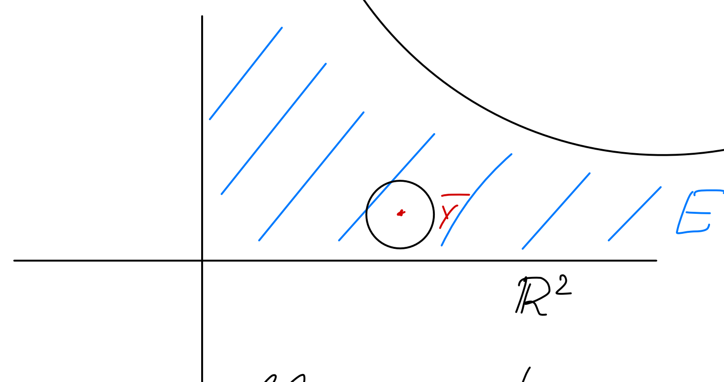
$\Rightarrow B(\bar{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \delta > 0.$$

Ex 2. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0\ \forall i = 1 \dots n\}$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $\bar{y} \in E \Rightarrow B(\bar{y}, \min(y_i)) \subset E$



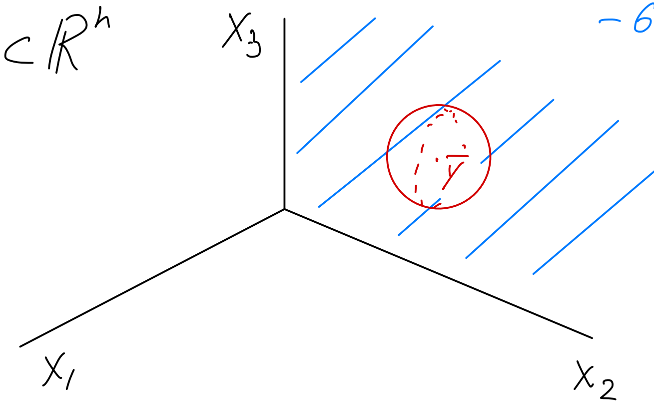
Ex 3. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ sont des sous-ensembles ouverts

ouvert par déf

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow B(\bar{x},\delta) \subset \mathbb{R}^n \quad \forall \delta > 0.$

Ex 4. Soit $n \geq 2$ $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0,\ x_i > 0,\ i = 2 \dots n\} \subset \mathbb{R}^n$

n'est pas ouvert !



$\bar{y} = (0, \overset{>0}{y_2}, \overset{>0}{y_3} \dots) \in E$ Alors pour tout $\delta > 0$

$B(\bar{y}, \delta) \ni (\underbrace{\tfrac{\delta}{2}}_{>0}, y_2, y_3 \dots y_n) \notin E.$

Propriétés (1) Toute réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert. $\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \Rightarrow \bar{x} \in E_j$ pour un indice j, E_j est ouvert $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset E_j$

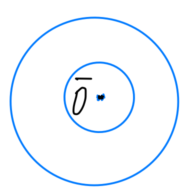
$\Rightarrow B(\bar{x}, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i = E.$

(2) Toute intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert : $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow \forall_j\ \bar{x} \in E_j$ ouvert $\Rightarrow \exists \delta_j > 0 : B(\bar{x}, \delta_j) \subset E_j$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j\ \forall_j \Rightarrow \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i = E.$

Remarque. Intersection infinie des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement ouvert : $\bigcap_{k=1}^{\infty} B(\bar{0}, \tfrac{1}{k}) = \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n$

n'est pas ouvert.



Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est *fermé* dans $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $CE \overset{\text{déf}}{=} \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

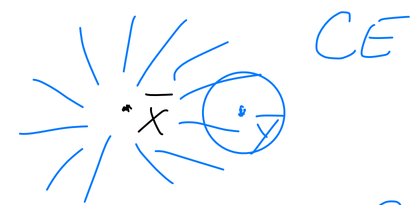
Ex 1. $CB(\bar{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé: $E = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \delta\}$

(puisque $B(\bar{x}, \delta)$ est ouverte).

Ex 2. $E = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.

$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0\}$ est ouvert,

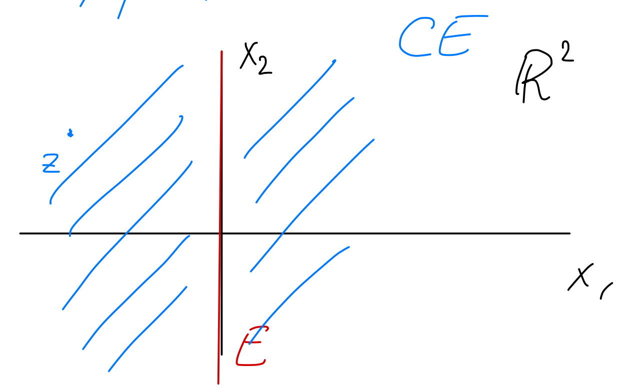
$\forall \bar{y} \in CE$, la boule $B(\bar{y}, \frac{1}{2}\|\bar{y} - \bar{x}\|) \subset CE$.



Ex 3. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ est fermé.

$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : y_1 \neq 0\}$ est ouvert; $\forall \bar{z} \in CE \Rightarrow z_1 \neq 0$

$\Rightarrow B(\bar{z}, \frac{1}{2}|z_1|) \subset CE$



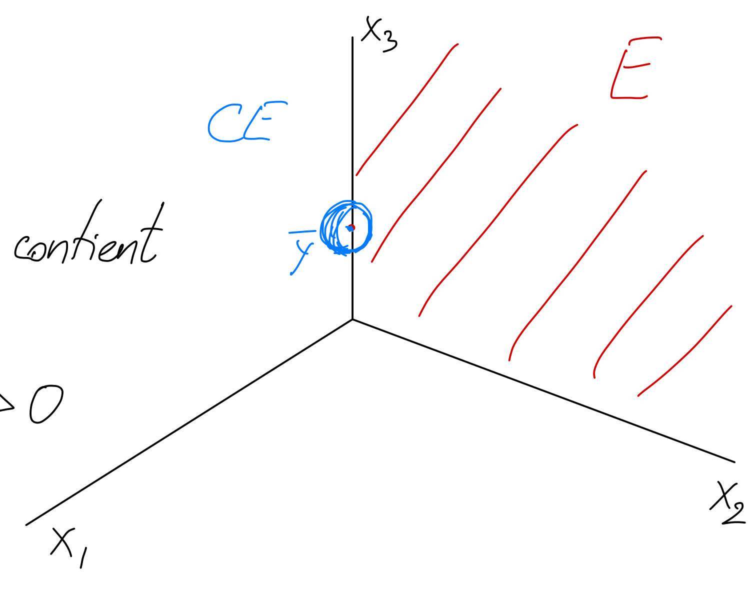
Ex 4. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2 \ldots n\}, n \geq 2$

$CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq 0\} \cup \bigcup_{i=2}^{n} \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 0\}$

$\Rightarrow \bar{y} = (0, \underbrace{0}_{\leq 0}, y_3 > 0 \ldots y_n > 0) \in CE$. Pour $\delta > 0$, $B(\bar{y}, \delta)$ contient

$p = (0, \underbrace{\tfrac{\delta}{2}}_{>0}, \underbrace{y_3}_{>0}, \ldots \underbrace{y_n}_{>0}) \in B(\bar{y}, \delta)$ et $p \in E \Rightarrow p \notin CE \;\; \forall \delta > 0$

$\Rightarrow CE$ n'est pas ouvert $\Rightarrow E$ n'est pas fermé.



Ex5. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermé : $C\emptyset = \mathbb{R}^n$ ouvert ; $C\mathbb{R}^n = \emptyset$ ouvert.

Les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ fermés et ouverts à la fois sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ (voir DZ).

Propriété des sous-ensembles fermés.

(1) $\bigcap_{i\in I} E_i$ Toute intersection des sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

$$\left(CE = \bigcup_{i\in I} CE_i \text{ est ouvert} \right).$$

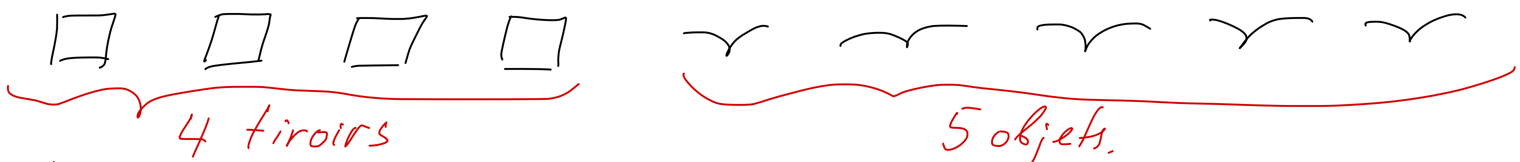
(2) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ Toute réunion finie des sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

$$\left(CE = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i \text{ est ouvert} \right).$$

Méthodes de démonstration.

Méthode 6. Démonstration par le principe des tiroirs.

Principe des tiroirs. Si $(n+1)$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.



Plus généralement. Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \overset{\text{dif}}{=} \min\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$ objets, ou plus.

fonction plafond

Ex 1. Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des nombres entiers. Alors il existe 2 d'entre eux tels que leur difference est divisible par 3.

Dém: Soient r_1, r_2, r_3, r_4 les restes de division de a_1, a_2, a_3, a_4 par 3.

Alors $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{0,1,2\}$. Par le principe des tiroirs, il existe 2 restes qui sont les mêmes $\Rightarrow r_i = r_j \Rightarrow$ Alors la difference $a_i - a_j$ est divisible par 3. ∎

Ex 2. Dans un groupe de n personnes $(n \geq 2)$ il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances dans le groupe.

Démonstration par la disjonction des cas et la méthode des tiroirs .....

.... à suivre.