Rappel: Ex 2. EDL 2 complète:

$$y''(x) - \frac{1}{x(\log x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\log x - 1)} y(x) = \log x - 1 \quad \text{sur }]e, \infty[$$

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ v_1(x) = x \\ (2)\ v_2(x) = -\log x \end{array}\right\} \text{ linéairement indépendantes}$$

=> Solution générale de l'équation homogène associée:

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \log x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \ x \in]e, \infty[$$

---

(3) Trouver une solution particulière de l'équation complète.

$$v_0(x) = C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x) \quad \text{où} \quad C_{\boxed{1}}(x) = \boxed{-}\int \frac{f(x) v_{\boxed{2}}(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx \ ; \quad C_{\boxed{2}}(x) = \boxed{+}\int \frac{f(x) v_{\boxed{1}}(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}(x) = \det \begin{pmatrix} x & -\log x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \log x = \log x - 1 \neq 0$$

sur $]e, \infty[$

$$C_1(x) = -\int \frac{\overbrace{\cancel{(\log x-1)}}^{f(x)}\overbrace{(-\log x)}^{v_2(x)}}{\underbrace{\cancel{(\log x-1)}}_{W[v_1,v_2](x)}}\,dx = \int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$$

$$C_2(x) = +\int \frac{\cancel{(\log x-1)}\cdot \overbrace{x}^{v_1(x)}}{\cancel{(\log x-1)}}\,dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{(on supprime les constantes)}$$

$$v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x) = x(\log x-1)\cdot x + \frac{1}{2}x^2(-\log x) = \frac{1}{2}x^2\log x - x^2\,,$$

$$\forall x\in\,]e,\infty[\,.$$

Vérification : $v_0(x)$ satisfait l'équation complète (exercice).

(4) Solution générale de l'équation complète:

$$v(x) = C_1 x + C_2\log x + \frac{1}{2}x^2\log x - x^2\,, \quad C_1, C_2\in\mathbb{R}\,,\quad x\in\,]e,\infty[$$

Méthode des coefficients indéterminés pour $y''(x)+py'(x)+qy(x)=f(x)$ (3)

On sait obtenir 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée : $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0 \Rightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0$, $p,q\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow a,b$ les racines $\Rightarrow$ 3 cas

En principe on peut trouver une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation des constantes.

Dans certains cas il est possible de trouver une solution particulière de (3) plus vite par la méthode des coefficients indéterminés :

Soit $y''(x)+py'(x)+qy(x)=f(x)$ $\quad p,q\in\mathbb{R}$

$f: I\to\mathbb{R}$ continue

$\Rightarrow$ L'organigramme $\Rightarrow$

(1) $f(x)$ est-elle une combinaison linéaire de $e^{cx}R_n(x)$ et $e^{ax}(\cos(bx)P_k(x)+\sin(bx)Q_m(x))$, où $R_n(x)$, $P_k(x)$, $Q_m(x)$ sont des polynômes de degrés n, m, k, et $c, a, b \in \mathbb{R}$?

non

la méthode ne marche pas

=> méthode de variation des constantes

oui → (2) ou (3)

=> (2) Si $f(x) = e^{cx}R_n(x)$, le nombre $c \in \mathbb{R}$ est-il une racine de l'équation caractéristique $\lambda^2+p\lambda+q=0$?

non

Ansatz: $y_{part} = e^{cx}T_n(x)$

oui

Ansatz: $y_{part} = x^r e^{cx}T_n(x)$

où r est la multiplicité de la racine $\lambda=c$, $r=1$ ou 2,

et $T_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients indéterminés

=> (3) Si $f(x) = e^{ax}(\cos(bx)P_k(x)+\sin(bx)Q_m(x))$, le nombre $a+ib$ est-il une racine de $\lambda^2+p\lambda+q=0$?

non

Ansatz: $y_{part} = e^{ax}(T_N(x)\cos(bx)+S_N(x)\sin(bx))$

oui

Ansatz: $xe^{ax}(T_N(x)\cos(bx)+S_N(x)\sin(bx))$

où $N=\max(k,m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes de degré N à coefficients indéterminés.

Remarque. Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où $f_1(x)$ est de la forme $e^{cx}R_n(x)$, et $f_2(x)$ de la forme $e^{ax}(S_n(x)\cos(bx) + Q_m(x)\sin(bx))$, alors on utilise la méthode pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ séparément

$\to y_{part_1}(x)$ $\qquad \to y_{part_2}(x)$

et le principe de superposition des solutions

$\longrightarrow y_{part}(x) = y_{part_1}(x) + y_{part_2}(x)$.

Ex3. $2y'' - y' - y = 100\, e^{2x}$. Trouver la solution générale, $x \in \mathbb{R}$.

(1) L'équation homogène associée : $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$

$\Rightarrow$ l'equation caractéristique : $\underbrace{\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2}}_{=(\lambda-1)(\lambda+\frac{1}{2})} = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} =$

$= 1, -\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow y_{hom}(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$$

- solution générale de l'équation homogène associée.

(2) Solution particulière de l'équation complète par la méthode de coefficients indéterminés.

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 50x e^{2x} \Rightarrow f(x) = 50x e^{2x} \text{ est de la forme } R_n(x) e^{cx},$$

où $R_n(x) = 50x$, $n=1$, $c=2$

$\Rightarrow$ la méthode s'applique.

$c=2$ est-il une racine de $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$? $\Rightarrow$ non

$\Rightarrow$ Alors l'Ansatz est: $y_{part}(x) = e^{2x}(Ax+B)$, où A et B sont des coefficients indéterminés.

$\longrightarrow$ à remplacer dans l'équation

$$\Rightarrow y_p'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x} \; ; \; y_p''(x) = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x}.$$

L'équation $\Rightarrow$

$$\underbrace{4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x}}_{y_p''} \underbrace{- \frac{1}{2}Ae^{2x} - (Ax+B)e^{2x}}_{-\frac{1}{2}y_p'} \underbrace{- \frac{1}{2}(Ax+B)e^{2x}}_{-\frac{1}{2}y_p} = 50x e^{2x}$$

$$\Rightarrow x e^{2x}\left(4-1-\frac{1}{2}\right)A + e^{2x}\left(\left(4-\frac{1}{2}\right)A + \left(4-1-\frac{1}{2}\right)B\right) = 50x e^{2x}$$

$$x e^{2x}\left(\frac{5}{2}A\right) + e^{2x}\left(\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\right) = 50x e^{2x}$$

$$x e^{2x}\left(\frac{5}{2}A\right) + e^{2x}\left(\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\right) = 50x e^{2x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}A = 50 \\ \frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 20 \\ 70 + \frac{5}{2}B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 20 \\ B = -28. \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y_{part}(x) = (20x-28)e^{2x}$ Vérification: exercice.

$\Rightarrow$ la solution générale de $2y''-y'-y = 100x e^{2x}$ est

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + (20x-28)e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$$

Remarque. On peut obtenir le même resultat par la méthode de variation des constantes.

$v_1(x) = e^{x}$, $v_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ - deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène

$$W[v_1,v_2](x) = \det\begin{pmatrix} e^{x} & e^{-\frac{x}{2}} \\ e^{x} & -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} = -\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\Rightarrow v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x).$$

$$C_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1,v_2](x)}dx = -\int \frac{50x\,e^{2x}\cdot e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}}dx = +\int \frac{100}{3}x\,e^{x}dx = \frac{100}{3}x\,e^{x} - \frac{100}{3}\int e^{x}dx =$$

$$= \frac{100}{3}\left(x\,e^{x} - e^{x}\right) = \frac{100}{3}(x-1)e^{x}.$$

$$C_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1,v_2](x)}dx = \int \frac{50x\,e^{2x}\cdot e^{x}}{-\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}}dx = -\frac{100}{3}\int x\,e^{\frac{5}{2}x}dx = -\frac{40}{3}\int x\,d\left(e^{\frac{5}{2}x}\right) =$$

$$= -\frac{40}{3}x\,e^{\frac{5}{2}x} + \frac{40}{3}\int e^{\frac{5}{2}x}dx = -\frac{40}{3}x\,e^{\frac{5}{2}x} + \frac{16}{3}e^{\frac{5}{2}x}.$$

$$\Rightarrow v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x) = \frac{100}{3}(x-1)e^{x}\cdot e^{x} + \left(-\frac{40}{3}x\,e^{\frac{5}{2}x} + \frac{16}{3}e^{\frac{5}{2}x}\right)e^{-\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{100}{3}x\,e^{2x} - \frac{100}{3}e^{2x} - \frac{40}{3}x\,e^{2x} + \frac{16}{3}e^{2x} = \underline{20x\,e^{2x} - 28\,e^{2x}}$$

– la même solution particulière.

Méthodes de démonstration.

Méthode 5. Démonstration par absurde.

Proposition P

Idée: Pour démontrer P, on essaie de démontrer que $\neg P$ implique une proposition F qui est connue d'être fausse.

(Donc $\neg P \Rightarrow F$ qui est contradictoire aux axiomes, ou aux propositions vraies préalablement établies).

Par contraposée: $P \Rightarrow Q \overset{\text{méthode 2}}{\Longleftarrow} \neg Q \Rightarrow \neg P$

Par absurde: $P \overset{\text{méthode 5}}{\Longleftarrow} \neg P \Rightarrow F$ evidemment fausse.

Ex 1. Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration par absurde (Euclide).

Supposons qu'il existe seulement un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de nombres premiers: $p_1, p_2 \ldots p_n$. $\quad p_i > 1 \quad \forall i = 1 \ldots n$

Considérons le nombre $K = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.

On a : $K > p_i$ pour tout $p_i \in \{p_1 \dots p_n\} \Rightarrow K \neq p_i$ pour tout $i = 1 \dots n$.

$\Rightarrow K$ n'est pas un nombre premier, $K > 1$.

$\Rightarrow K$ est divisible par un nombre premier d'entre $\{p_1 \dots p_n\}$, disons par p_i.

Evidemment, le produit $p_1 \dots p_n$ est aussi divisible par p_i.

Alors $K - p_1 \dots p_n = \underbrace{1 \text{ est divisible par } p_i}_{\text{evidemment faux}} \Rightarrow$ absurde. $\square$

Ex 2 $\sqrt{2}$ est irrationnel (Euclide). (voir Cours 2, Analyse I).

Ex 3. Il n'existe pas de nombres entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$18x + 6y = 28.$$

Dém: Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $18x + 6y = 28$.

$$\Rightarrow 3x + y = \frac{14}{3} \Rightarrow \underbrace{3x + y - 4}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\notin \mathbb{Z}}, \text{ contradiction.}$$

puisque $\mathbb{Z}$ est fermé par $+, -, \times$

$\square$