

## Rappel: Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2).

-41-

(1)  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$   $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonctions continues

(2) EDL2 homogène:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad p, q: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions continues}$$

(3) EDL2 à coefficients constants:

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x) \quad p, q \in \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction continue.}$$

(4) EDL2 homogène à coefficients constants:

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

La solution générale pour (4) :  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow a, b \Rightarrow 3 \text{ cas} \Rightarrow \text{solution générale.}$

Pour (2), si  $v_1(x)$  est une solution et  $v_1(x) \neq 0$  sur  $I \Rightarrow v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$  est une solution linéairement indépendante, où  $P(x)$  est une primitive de  $p(x)$ .

Aujourd'hui: Solution générale de (2) à partir de  $v_1(x)$  non triviale; méthodes de solution de (1).

## Caractérisation des 2 solutions de (2) linéairement indépendantes

-42-

Déf Si  $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $I \subset \mathbb{R}$   
alors la fonction  $W[v_1, v_2] : I \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de  $v_1$  et  $v_2$ .

Ex 1.  $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = -1$

$\Rightarrow v(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$  où  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  est la solution générale,  $x \in \mathbb{R}$ .

$$\Rightarrow \underline{W[e^{-x}, x e^{-x}]} = \det \begin{pmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix} = e^{-2x} \cancel{-x e^{-2x}} + x \cancel{e^{-2x}} = \underline{e^{-2x}}$$

Observation:  $e^{-2x} = W[e^{-x}, x e^{-x}] \neq 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

Exercice:  $u_1(x) = e^{-x}$ ,  $u_2(x) = x e^{-x} - e^{-x} \leadsto$  calculer  $W[u_1, u_2] = \dots = e^{-2x}$

$$\underline{\det \begin{pmatrix} e^{-x} & x e^{-x} - e^{-x} \\ -e^{-x} & 2e^{-x} - x e^{-x} \end{pmatrix} = 2e^{-2x} - x e^{-2x} + x e^{-2x} - e^{-2x} = \underline{e^{-2x}}}$$

Proposition. Soient  $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  deux solutions de l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ .  
Alors:  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  sont linéairement indépendantes  $\Leftrightarrow W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

Dém: Montrons les deux implications:  $Q \Rightarrow P$  et  $P \Rightarrow Q$  par contraposée.

(1)  $\neg P \Rightarrow \neg Q$ . Les solutions sont linéairement dépendantes  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  sans perte de généralité, il existe  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $v_1(x) = c v_2(x) \quad \forall x \in I$ .

Alors on a: 
$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & c v_1(x) \\ v_1'(x) & c v_1'(x) \end{pmatrix} = c v_1(x) v_1'(x) - c v_1(x) v_1'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$
  
$$\Rightarrow W[v_1, v_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$$

(2)  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ . Supposons qu'il existe  $x_0 \in I$ :  $W[v_1, v_2](x_0) = 0$ .

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{il existe un vecteur non nul } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que}$$

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a v_1(x_0) + b v_2(x_0) = 0 \\ a v_1'(x_0) + b v_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit  $v(x) = a v_1(x) + b v_2(x)$ . Alors  $v(x)$  est une solution de l'équation donnée.  
et de plus,  $v(x_0) = 0$  et  $v'(x_0) = 0$ . Par le théorème de l'existence et unicité  
d'une solution de l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , cette équation admet

une seule solution satisfaisant  $y(x_0)=0$  et  $y'(x_0)=0$ . Puisque la solution triviale  $y(x)=0 \forall x \in I$  satisfait l'équation et les conditions, alors nécessairement  $av_1(x)+bv_2(x)=0 \forall x \in I$ , fonction constante  $=0$ .

Puisque  $a$  et  $b$  ne sont pas tous les deux nuls, soit  $v_1(x)=-\frac{b}{a}v_2(x) \forall x \in I$   
 soit  $v_2(x)=-\frac{a}{b}v_1(x) \forall x \in I$   
 (soit les deux)  $\Rightarrow v_1(x)$  et  $v_2(x)$  sont linéairement dépendantes sur  $I$ .  $\square$

Exercice: EDL2 homogène à coefficients constants  $y''(x)+py'(x)+qy(x)=0$   
 $\Rightarrow \lambda^2+p\lambda+q=0$  telle que les racines sont  $\alpha = \bar{\beta} = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$

Montrer que  $W[e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} W[e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] &= \det \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{pmatrix} = \\ &= \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + \beta e^{2\alpha x} \cos^2 \beta x - \alpha e^{2\alpha x} \sin \beta x \cos \beta x + \beta e^{2\alpha x} \sin^2 \beta x = \beta e^{2\alpha x} (\cos^2 \beta x + \sin^2 \beta x) = \\ &= \beta e^{2\alpha x}, \beta \neq 0 \text{ puisque } \alpha = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R} \Rightarrow \beta e^{2\alpha x} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  les solutions  $e^{\alpha x} \cos \beta x$  et  $e^{\alpha x} \sin \beta x$  sont linéairement indépendantes sur  $\mathbb{R}$ .

-45-

Théorème. Soient  $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$  deux solutions linéairement indépendantes de l'équation  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ . Alors la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Dém: Soit  $\tilde{v}(x)$  une solution de l'équation donnée, et  $x_0 \in I$ .

Alors  $\tilde{v}(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{v}'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$

On a deux solutions linéairement indépendantes  $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$

Alors par la caractérisation on sait que  $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$ .

$\Rightarrow$  unique constantes  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{cases} C_1 v_1(x_0) + C_2 v_2(x_0) = a_0 \\ C_1 v_1'(x_0) + C_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction  $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$  - Alors :

- (1)  $v(x)$  est une solution de l'équation (puisque  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  sont des solutions)  
par superposition des solutions
- (2)  $v(x_0) = a_0$  et  $v'(x_0) = b_0$

Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales données  $v(x_0) = a_0, v'(x_0) = b_0$ ,

on a :  $\tilde{v}(x) = v(x) \quad \forall x \in I$ .



Considérons l'équation complète (1):  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ .

Superposition des solutions. Si  $v(x)$  est une solution de (1) et  $u(x)$  une solution de l'équation homogène associée:  $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ , alors  $v(x) + u(x)$  est une solution de l'équation (1) (Exercice).

Méthode de variation de constante: On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée:  $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(\Rightarrow W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I)$

Ansatz:  $v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x)$  où  $C_1(x)$  et  $C_2(x)$  sont deux fonctions de classe  $C^1$  sur  $I$ . (inconnues).

Conditions sur  $C_1(x)$  et  $C_2(x)$ ?

$$v_0'(x) = \underbrace{C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x)}_{\text{Supposons } = 0 \text{ :)}} + C_1(x)v_1'(x) + C_2(x)v_2'(x)$$

$$\Rightarrow v_0''(x) = C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) + C_1(x)v_1''(x) + C_2(x)v_2''(x). \Rightarrow$$

dans l'équation

$v_0''(x) + p(x)v_0'(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$ . Alors on a :

$$C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) + \underline{C_1(x)v_1''(x)} + \underline{C_2(x)v_2''(x)} + \underline{p(x)C_1(x)v_1'(x)} + \underline{p(x)C_2(x)v_2'(x)} +$$

$$\underline{q(x)C_1(x)v_1(x)} + \underline{q(x)C_2(x)v_2(x)} = f(x).$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0 \quad \text{puisque } v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont des solutions de l'équation homogène.}$$

$$\Rightarrow C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = f(x). \quad - \text{condition sur } C_1'(x) \text{ et } C_2'(x).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0 \\ C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{cases} \quad \forall x \in I$$

Système d'équation sur  $C_1'(x), C_2'(x)$

On sait que  $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}(x) \neq 0 \quad \text{sur } I.$$

$\Rightarrow$  il existe une unique solution  $\forall x \in I$

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2](x)} \begin{pmatrix} v_2'(x) & -v_2(x) \\ -v_1'(x) & v_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Rappel : Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$  et  $\det M \neq 0$ , alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

-48-

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x) f(x) \\ v_1(x) f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2](x)}$$

$\Rightarrow$

$$c_1(x) = - \int \frac{f(x) v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x) v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

(on supprime les constantes)

$\Rightarrow v_0(x) = c_1(x) v_1(x) + c_2(x) v_2(x)$  est une solution de (1).

$\Rightarrow$  La solution générale de (1) est

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + v_0(x) \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I.$$

Ex 2. Trouver la solution générale de l'équation:

$$y''(x) - \underbrace{\frac{1}{x(\log x - 1)}}_{p(x)} y'(x) + \underbrace{\frac{1}{x^2(\log x - 1)}}_{q(x)} y(x) = \underbrace{\log x - 1}_{f(x)} \quad \text{sur } ]e, \infty[$$

$p, q, f: ]e, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$   
continues

EDL2 complète.

(1) Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée: -49-

$$y'' - \frac{1}{x(\log x - 1)} y' + \frac{1}{x^2(\log x - 1)} y = 0. \quad (*)$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1, y'' = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x(\log x - 1)} + \frac{x}{x^2(\log x - 1)} = 0 \quad \forall x \in ]e, \infty[.$$

$\Rightarrow v_1(x) = x$  est une solution.

(2) Trouver une autre solution de (\*) linéairement indépendante:

$$v_2(x) = C(x)v_1(x) \text{ où } C(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, \text{ où } P(x) = \int p(x) dx$$

$$p(x) = -\frac{1}{x(\log x - 1)} \Rightarrow P(x) = -\int \frac{dx}{x(\log x - 1)} = -\int \frac{d(\log x)}{\log x - 1} = -\log(\log x - 1) \quad > 0, x > e$$

$$C(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\log(\log x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\log x - 1}{x^2} dx = -\int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{\log x}{x^2} dx =$$

$$= -\int \frac{dx}{x^2} - \int \underbrace{\log x}_f \underbrace{d\left(\frac{1}{x}\right)}_g = -\int \frac{dx}{x^2} - \frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x} d(\log x) = -\cancel{\int \frac{dx}{x^2}} - \frac{\log x}{x} + \cancel{\int \frac{dx}{x^2}} =$$

$$= -\frac{\log x}{x} \Rightarrow \underline{v_2(x) = C(x)v_1(x) = -\frac{\log x}{x} \cdot x = -\log x.}$$

Vérification pour  $v_2(x)$  (Exercice):  $v_2(x) \leadsto (*)$

$$v_2(x) = -\log x$$

$$v_2'(x) = -\frac{1}{x}, \quad v_2''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

$$(*) \quad y''(x) - \frac{1}{x(\log x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\log x - 1)} y(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2(\log x - 1)} - \frac{\log x}{x^2(\log x - 1)} = \frac{\log x - 1 + 1 - \log x}{x^2(\log x - 1)} = 0 \quad \text{Vrai.}$$

Alors la solution générale de l'équation homogène est

$$\underline{v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \log(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in ]e, \infty[.}$$

..... à suivre.