

§1.4. Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2)

-31-

Déf Soit I un intervalle ouvert. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** une équation de la forme:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad \text{EDL2}$$

où $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Def. Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite **EDL2 homogène**.

On cherche une solution de cette équation de classe C^2 .

Ex 1. $y'' = 0$ EDL2 homogène

$$\Rightarrow y'(x) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{y(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

EDL 2 homogène à coefficients constants.

-32-

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$(*) \quad y''(x) - (a+b)y'(x) + ab y(x) = 0 \quad a, b \in \mathbb{C}$$

où a et b sont les racines de l'équation quadratique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$$(\lambda - a)(\lambda - b) = \lambda^2 - \underbrace{(a+b)}_p \lambda + \underbrace{ab}_q$$

Pour résoudre $(*)$ on fait le changement de variable:

$$\underbrace{(y'(x) - a y(x))'}_{z(x)} - b \underbrace{(y'(x) - a y(x))}_{z(x)} = 0 \Leftrightarrow (*)$$

$$\Rightarrow z'(x) - b z(x) = 0 \Rightarrow \text{EDVS (EDL 1 homogène)}$$

$$\Rightarrow z(x) = C_1 e^{bx} \quad \text{la solution générale, } C_1 \text{ arbitraire, } x \in \mathbb{R}$$

$z(x) = y'(x) - a y(x) \Rightarrow$ on obtient l'équation pour $y(x)$:

$$\underbrace{y'(x)}_{p(x)} - a \underbrace{y(x)}_{f(x)} = C_1 e^{bx}$$

EDL 1

$$y'(x) - a y(x) = C_1 e^{bx} ; p(x) = -a, f(x) = C_1 e^{bx}$$

$$\Rightarrow P(x) = \int -a dx = -ax \Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = C_2 e^{ax} \text{ - solution générale de l'équation homogène associée.}$$

$$C(x) = \int \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)} \cdot \underbrace{e^{-ax}}_{e^{P(x)}} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x} & \text{si } b \neq a \\ C_1 x & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$y_{\text{part}}(x) = C(x) e^{-P(x)} = \begin{cases} C_1 e^{(b-a)x} e^{ax} = C_1 e^{bx}, & \text{si } b \neq a \\ C_1 x e^{ax} & , \text{ si } b = a \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} C_2 e^{ax} + C_1 e^{bx}, & \text{si } a \neq b \\ \underbrace{C_2 e^{ax}}_{y_{\text{hom}}} + \underbrace{C_1 x e^{ax}}_{y_{\text{part}}}, & \text{si } a = b \end{cases}$$

C_1, C_2 deux constantes arbitraires,
 a, b racines de l'équation caractéristique
 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

Si $a \neq \bar{b}$ sont des racines complexes, $a, b \notin \mathbb{R} \Rightarrow a = \bar{b}$

$\Rightarrow y(x) = C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x}$ pour avoir une solution réelle. $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\beta \neq 0$

Soit $C = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4) \Rightarrow \bar{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)$, $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

$$y(x) = C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x} = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4) e^{\alpha x} e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4) e^{\alpha x} e^{-i\beta x} =$$

$$= C_3 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}}_{\cos \beta x} + C_4 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}}_{\sin \beta x} \quad [-i = \frac{1}{i}]$$

$$\begin{cases} e^{i\beta x} = \cos \beta x + i \sin \beta x \\ e^{-i\beta x} = \cos \beta x - i \sin \beta x \end{cases} \Rightarrow \cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}$$

$$\rightarrow = C_3 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{où } C_3, C_4 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

arbitraires

C'est la solution générale de l'équation dans le cas $b = \bar{a} \notin \mathbb{R}$.

Résumé: EDL2 homogène à coefficients constants.

$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$ Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

Alors la solution générale est:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} & \text{si } a \neq b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax} & \text{si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x & \text{si } a = \alpha + i\beta = \bar{b} \notin \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ex 2 $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow$ l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$
 $(\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow a = b = -1$

$\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ est la solution générale.

Exercice: Vérification. $y'(x) = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x};$

$y''(x) = C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \Rightarrow$ dans l'équation $\Rightarrow$

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = \underline{C_1 e^{-x}} - \underline{2C_2 e^{-x}} + \underline{C_2 x e^{-x}} - \underline{2C_1 e^{-x}} + \underline{2C_2 e^{-x}} - \underline{2C_2 x e^{-x}} + \underline{C_1 e^{-x}} + \underline{C_2 x e^{-x}} = 0$$

Vrai.

Considérons l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, $p, q: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues

Théorème Une EDL2 homogène admet une seule solution $y(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$ (sans démonstration).

Remarques (1) Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont 2 solutions de EDL2 homogène alors $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ est aussi une solution, où $A, B \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & (Ay_1(x) + By_2(x))'' + p(x)(Ay_1(x) + By_2(x))' + q(x)(Ay_1(x) + By_2(x)) = \\ & = A(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) + B(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) = 0 \end{aligned}$$

puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions.

(2) Si $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y(x_0) = Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = t \\ y'(x_0) = Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{2 équations linéaires} \\ \text{pour 2 variables (A, B)} \end{array}$

$\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \text{solutions} \end{array}$

$$\begin{aligned} \exists \text{ unique solution} & \Leftrightarrow (y_1(x_0), y_1'(x_0)) \neq k(y_2(x_0), y_2'(x_0)) \\ & (y_2(x_0), y_2'(x_0)) \neq k(y_1(x_0), y_1'(x_0)) \end{aligned}$$

Déf. Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont linéairement indépendantes s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$y_2(x) = c y_1(x) \quad \text{ou} \quad y_1(x) = c y_2(x) \quad \forall x \in I$$

(Cela implique, en particulier, que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas trivialement $= 0$ sur I).

Thm $\Rightarrow$ l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ possède exactement 2 solutions linéairement indépendantes.

Comment résoudre $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$?

Supposons que $v_1(x)$ est une solution de cette équation, telle que $v_1(x) \neq 0$ sur I .

On sait trouver une autre solution, linéairement indépendante.

Ansatz: $v_2(x) = c(x)v_1(x)$ telle que $c(x) \neq \text{constante}$.

Alors: $v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + \underbrace{c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x)}_{2c'(x)v_1'(x)} + c(x)v_1''(x) \Rightarrow \text{dans l'équation}$$

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + \underbrace{C(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x)}_{=0} = 0$$

$$C(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

puisque $v_1(x)$ est une solution.

$$\Rightarrow c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que $v_1(x) \neq 0$ sur I et $c'(x) \neq 0$ sur I (une condition de plus)
(ne s'annule pas en aucun point de l'intervalle).

$$\text{Alors } \frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2 \frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \Rightarrow \text{EDVS pour } c'(x)$$

$$\Rightarrow \log |c'(x)| = -P(x) - 2 \log |v_1(x)| + \log C, \quad C \in \mathbb{R}_+$$

$$\underbrace{\log e^{-P(x)}}_{\log e^{-P(x)}} + \underbrace{\log \frac{C}{v_1^2(x)}}_{\log \frac{C}{v_1^2(x)}} = \log \frac{C e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}$$

$$\Rightarrow c'(x) = \pm C \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} = C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, \quad C_1 = \pm C$$

$$\Rightarrow c(x) = \int C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow v_2(x) = C(x)v_1(x)$ est une solution

Si on prend $C_1 = 1$, $C_2 = 0 \Rightarrow$ on obtient une solution $v_2(x)$ telle que $v_2(x)$ et $v_1(x)$ sont linéairement indépendantes.

$$v_2(x) = C(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

Ex 2. $y'' + 2y' + y = 0$ EDL2 homogène

$v_1(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ (facile à voir), $v_1(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

On cherche une solution linéairement indépendante :

$p(x) = 2 \Rightarrow P(x) = 2x$ (sans constante)

$$\Rightarrow v_2(x) = C(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = e^{-x} \int \frac{e^{-2x}}{(e^{-x})^2} dx = e^{-x} \int 1 dx =$$

$$= e^{-x} \cdot x \Rightarrow v_2(x) = x e^{-x} \text{ - une solution lin. indépendante.}$$

D'après le Thm $\Rightarrow y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$ est la solution générale
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\tilde{v}_2(x) = e^{-x} \int \frac{e^{-2x}}{(e^{-x})^2} dx = e^{-x} \int 1 dx = e^{-x}(x+A) \Rightarrow$ un autre couple
 des solutions linéairement indépendantes: $v_1(x) = e^{-x}$ et $\tilde{v}_2(x) = x e^{-x} + A e^{-x}$.
 $\Rightarrow y(x) = C_3 e^{-x} + C_4 (x e^{-x} + A e^{-x}) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
 où C_3, C_4, C_1, C_2 sont des constantes réelles arbitraires.
 $\Rightarrow$ On obtient toujours la même solution générale.

Maintenant: Supposons qu'on a $v_1(x) = x e^{-x}$ comme la première solution,
 et essayons de trouver $v_2(x)$ linéairement indépendante. Soit $v_1(x) = x e^{-x}$
 sur $] -\infty, 0[$ et $] 0, \infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{Alors } v_2(x) &= C(x) v_1(x) = x e^{-x} \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = x e^{-x} \int \frac{e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}} dx = \\
 &= x e^{-x} \left(-\frac{1}{x} \right) = -e^{-x} \quad \text{sur }] -\infty, 0[\text{ et }] 0, \infty[.
 \end{aligned}$$

Puisque $-e^{-x}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on obtient $v_2(x) = -e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow v_1(x) = x e^{-x}, \quad v_2(x) = -e^{-x}$ sont des solutions linéairement indépendantes.

et $v(x) = C_1 x e^{-x} + C_2 e^{-x}$ est la solution générale sur $\mathbb{R}$,
toujours la même.