

Rappel: Equations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1).

-21-

$$y' + p(x)y = f(x) \quad p, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions continues}$$

Alors la solution générale est donnée par la formule:

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

la solution générale
de l'équation homogène
associée : $y' + p(x)y = 0$

une solution particulière
de l'équation donnée : $y' + p(x)y = f(x)$

$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-P(x)}, \text{ où } P(x) = \int p(x) dx \text{ est une primitive de } p(x)$$

(on supprime la constante), $C \in \mathbb{R}$

$$y_{\text{part}}(x) = \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$$

une primitive (on supprime la constante)

La solution générale de l'EDL1:

$$y(x) = C e^{-P(x)} + \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)} \quad \forall C \in \mathbb{R}, x \in I$$

Quel type d'équation?

(a) $e^x y' = y^3 + y \Rightarrow \frac{dy}{y^3 + y} = \frac{1}{e^x} dx ; \frac{dy}{y^3 + y} = e^{-x} dx \Rightarrow \text{EDVS}$ ($y=0$ est aussi une solution)

(b) $(1 + \sin^2 x) y^2 y' = \cos x \Rightarrow y^2 dy = \frac{\cos x dx}{(1 + \sin^2 x)} \Rightarrow \text{EDVS}$

(c) $2y' - 2x = y \Rightarrow y' - \frac{1}{2}y = x, p(x) = -\frac{1}{2}, f(x) = x \Rightarrow \text{EDL1}$

(d) $y' = (3x + y)^2 \Rightarrow \text{changement de variable } z = 3x + y \Rightarrow z' = 3 + y' \Rightarrow y' = z' - 3 \Rightarrow z' - 3 = z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z^2 + 3} = dx \Rightarrow \text{EDVS après le changement de variable}$

Ex 1. $y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}$ EDL1 $p:]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

(i) On cherche la solution générale de l'équation homogène associée:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0 \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[; p(x) = -\frac{2}{x}$$

$$\Rightarrow P(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \log|x| = -\log x^2, x \neq 0 \text{ (pas de constante)}$$

$$\Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-(-\log x^2)} = C x^2 \text{ sur }]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[$$

Vérification $(C x^2)' - \frac{2}{x}(C x^2) = 2Cx - 2Cx = 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \forall C \in \mathbb{R} \quad \checkmark$

(2) On cherche une solution particulière de l'équation complète.

-23-

$$y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{x}{2}}_{f(x)}$$

$$\int f(x) e^{P(x)} dx = \int \frac{x}{2} e^{-\log x^2} dx = \int \frac{x}{2} \frac{1}{x^2} dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \log |x|, \quad x \neq 0$$

(pas de constante)

$$\Rightarrow y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2} \log |x| \cdot e^{\log x^2} = \frac{1}{2} x^2 \log |x|, \quad x \neq 0.$$

Vérification Soit $x \in]-\infty, 0[\Rightarrow y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2} x^2 \log(-x)$

$$y' - \frac{2}{x} y = \left(\frac{x^2}{2} \log(-x) \right)' - \frac{2}{x} \left(\frac{x^2}{2} \log(-x) \right) = \cancel{x \log(-x)} + \frac{x^2}{2} \frac{1}{-x} (-1) - \cancel{x \log(-x)} = \frac{x}{2} = f(x) \quad \checkmark$$

On vérifie d'une manière similaire la solution $y_{\text{part}} = \frac{1}{2} x^2 \log(x)$, $x \in]0, \infty[$.

(3) Solution générale de l'EDL1:

$$y(x) = \begin{cases} Cx^2 + \frac{x^2}{2} \log x, & x \in]0, \infty[, \quad C \in \mathbb{R} \\ Cx^2 + \frac{x^2}{2} \log(-x), & x \in]-\infty, 0[, \quad C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ex2. EDL1 avec une condition initiale.

$$y' - \underbrace{\text{tg} x \cdot y}_{p(x)} = \underbrace{\cos x}_{f(x)}$$

$\text{tg}(x)$ n'est pas continue en $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $k \in \mathbb{Z}$

Trouver la solution maximale avec la condition initiale $y(0)=3$

$\Rightarrow$ puisque $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère l'équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

$p, f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ continues.

(1) Solution générale de l'équation homogène associée:

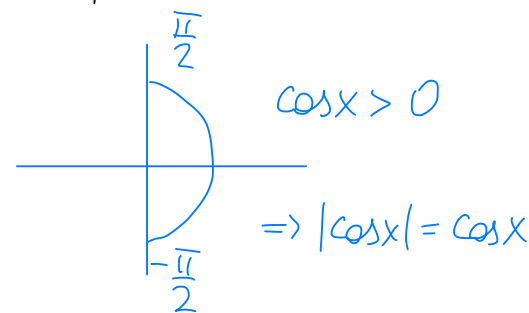
$$\underline{y' - \text{tg} x \cdot y = 0}$$

$$P(x) = - \int \text{tg}(x) dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \log |\cos x| \quad (\text{pas de constante})$$

$$x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$\Rightarrow P(x) = \log(\cos x)$$

$$\underline{y_{\text{hom}}(x)} = C \cdot e^{-P(x)} = C \cdot e^{-\log(\cos x)} = \frac{C}{\cos x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad C \in \mathbb{R}$$



(2) Solution particulière de l'équation complète $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \cos x$

$$\int f(x) e^{P(x)} dx = \int \cos x \cdot e^{\log(\cos x)} dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx =$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \quad (\text{pas de constante})$$

$$y_{\text{part}}(x) = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) e^{-P(x)} = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \overbrace{\sin 2x}^{2 \sin x \cos x} \right) \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x.$$

$$\underline{y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.}$$

Exercice: vérification : $y' - \operatorname{tg} x \cdot y = \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x \right)' - \operatorname{tg} x \left(\frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x \right) =$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 \cdot \cos x + x \cdot \sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x = \cos x. \quad \checkmark$$

(3) Solution générale: $y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad C \in \mathbb{R}$

(4) Condition initiale: $y(0) = 3 \Rightarrow y(0) = C + 0 + 0 = C = 3 \Rightarrow C = 3.$

$\Rightarrow$ La solution maximale satisfaisant la condition initiale est:

$$\underline{y(x) = \frac{3}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$$

Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle.

-26-

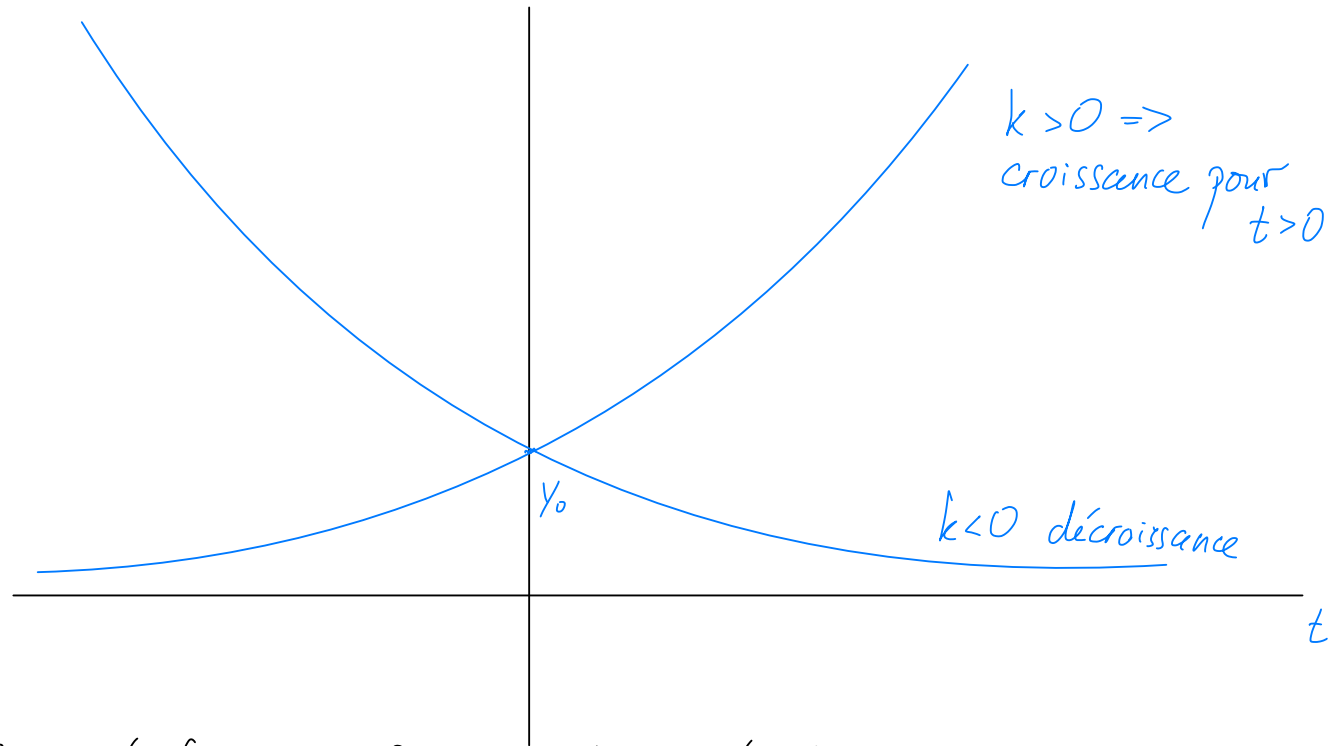
Soit $y = y(t)$ tel que $y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$; $y = 0$ est une solution

$$\text{EDVS : } \int \frac{dy}{y} = \int k dt \Rightarrow \log|y| = kt + C_1 \Rightarrow |y| = \underbrace{e^{C_1}}_{>0} e^{kt} \Rightarrow \underline{y(t) = C e^{kt}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Condition initiale :

$$y(0) = y_0 > 0$$

$$y(0) = C e^{k \cdot 0} = C = y_0$$



$\Rightarrow$ La solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$
est $y(t) = y_0 e^{kt}$

Par exemple, désintégration radioactive, $k < 0$
croissance d'une population $k > 0$

propagation d'un virus $k > 0$ ☺
 $k < 0$ ☹

Méthodes de démonstration.

-27-

Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas.

Ex 1. Soit $n \in \mathbb{Z}$ (un nombre entier). Alors $n^2 \geq n$.

Dém. $n^2 \geq n \Leftrightarrow n(n-1) \geq 0$ $\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$

(1) Soit $n \geq 1 \Rightarrow \underbrace{n}_{\geq 0} \underbrace{(n-1)}_{\geq 0} \geq 0 \quad \checkmark$

(2) Soit $n \leq 0 \Rightarrow \underbrace{n}_{\leq 0} \underbrace{(n-1)}_{< 0} \geq 0 \quad \checkmark$

Alors l'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$. ▣

Soient P, Q deux propositions. Pour montrer $P \Rightarrow Q$ on sépare l'hypothèse de P de départ en différents cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer tous les cas possibles.

Ex 2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Alors $t = \frac{n \cdot m \cdot (n-m)(n+m)}{3} \in \mathbb{Z}$

Dém. (1) $n = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$

(2) $m = 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$

(3) ni n ni m n'est divisible par 3

(a) mêmes restes de division par 3 $\Rightarrow (n-m)=3k \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$ ✓

(b) les restes de division par 3 de n et m sont différentes $\Rightarrow$
 $(n+m)=3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow t \in \mathbb{Z}$. ✓

Méthode 4. Comment démontrer les propositions de la forme

$$P \Leftrightarrow Q$$

si et seulement si

2 méthodes : (1) $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

(2) Suite d'équivalences : $P \Leftrightarrow R_1 \Leftrightarrow R_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$.

Attention: Pour (2) il faut vérifier que chaque implication est une équivalence.

Ex 3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$

P : $\{ ab + 1 = c^2 \text{ pour un nombre naturel } c \}$

Q : $\{ a = b \pm 2 \}$

Proposition. "fausse". Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Alors $P \Leftrightarrow Q$.

Démonstration: fallacieuse!!

$$\underbrace{ab+1=c^2}_P \Leftrightarrow ab=c^2-1 \Leftrightarrow ab=(c-1)(c+1) \not\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=c-1 \\ b=c+1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b-2 \\ \begin{cases} a=c+1 \\ b=c-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b+2 \end{cases}$$

faute: ce n'est pas une équivalence
l'implication juste: $\Leftarrow$

Contre-exemple: $a=3, b=8 \Rightarrow ab+1=24+1=25=5^2$, mais $a \neq b \pm 2$

Proposition. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Alors $Q \Rightarrow P$.

$$\{a=b \pm 2\} \quad \{ab+1=c^2, c \in \mathbb{N}\}$$

Dém: $a = b \pm 2 \in \mathbb{N} \Rightarrow ab+1 = b(b \pm 2) + 1 = b^2 \pm 2b + 1 = (b \pm 1)^2 = c^2$
 $\Rightarrow c = b \pm 1 \in \mathbb{N}$ ▣

Ex 4. Soient $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$ $\rho > 0$. $P: \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}$ $Q: \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ -30-
 Alors $P \Leftrightarrow Q$

Dém: ($\Leftarrow$) Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ où $\varphi = \frac{k\pi}{2} \Rightarrow z^2 = \rho^2 e^{2i\frac{k\pi}{2}} = \rho^2 e^{i\pi k} =$
 $= \rho^2 (\underbrace{\cos \pi k}_{= \pm 1} + i \underbrace{\sin \pi k}_{= 0}) = \rho^2 (\pm 1) \in \mathbb{R}^*$ $\forall k \in \mathbb{Z}$

($\Rightarrow$) Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ t.q. $z^2 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 (\cos 2\varphi + i \underbrace{\sin 2\varphi}_{= 0}) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$
 $\Rightarrow \sin 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ ▣