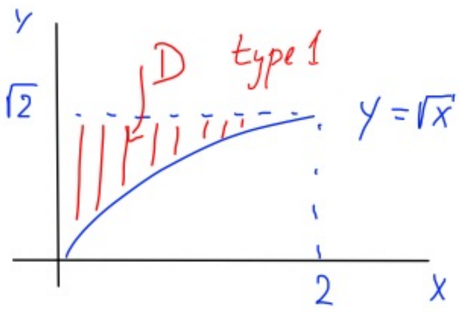
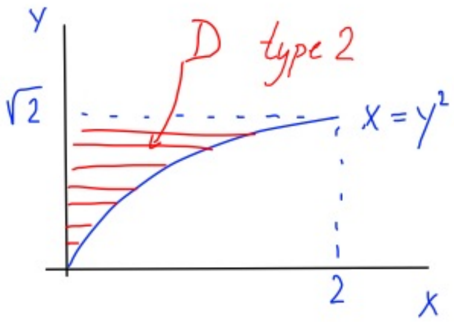
Rappel: Méthodes d'intégration des fonction de plusieurs variables.

1 Théorème de Fubini => Changement d'ordre d'intégration.

Ex





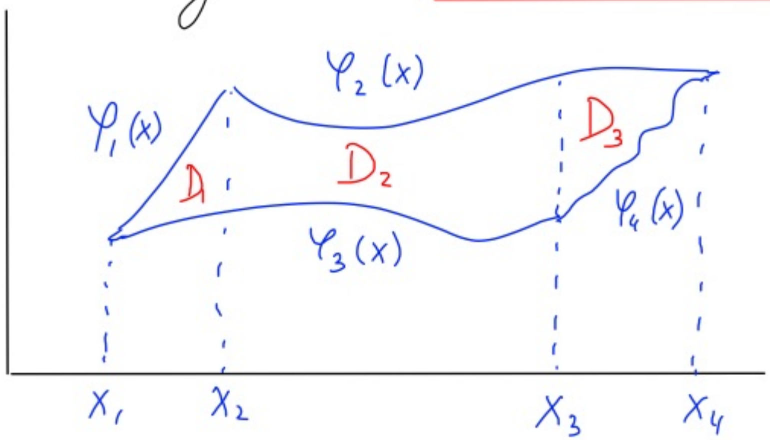
$$\int_0^2 dx \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{2}} f(x,y)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}} dy \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx$$

$f: \bar{D} \to \mathbb{R}$ continue

2 L'additivité de l'intégrale => Division du domaine d'intégration.

$$D = \bigcup_{i=1}^{3} D_i$$

domaines réguliers



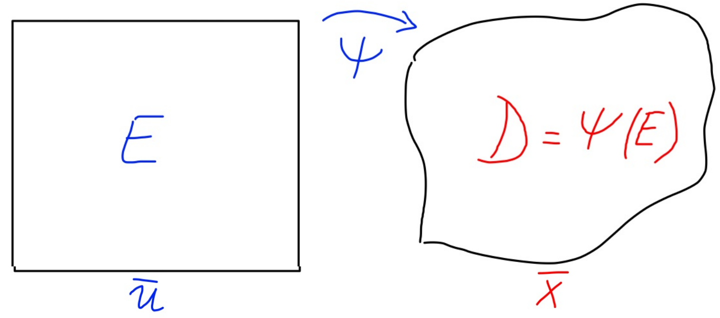
Il faut diviser le domaine en réunion des domaines réguliers et utiliser l'additivité de l'intégrale.

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{x_2}^{x_3}\left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx + \int_{x_3}^{x_4}\left(\int_{\varphi_4(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

3 Changement de variables

Thm Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble, $\bar{E}$ est compact, $\Psi : \bar{E} \to \mathbb{R}^n$ telle que $\Psi \in C^1(\bar{E})$, et $\Psi : E \to \Psi(E) = D$ bijective. Soit $f : \bar{D} = \overline{\Psi(E)} \to \mathbb{R}$ fonction continue.

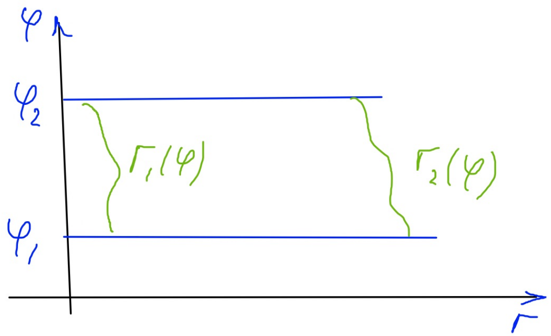
Alors
$$\boxed{\int_D f(\bar{x})\, d\bar{x} = \int_E f(\Psi(\bar{u}))\, \underline{|\det J_\Psi(\bar{u})|}\, d\bar{u}}$$

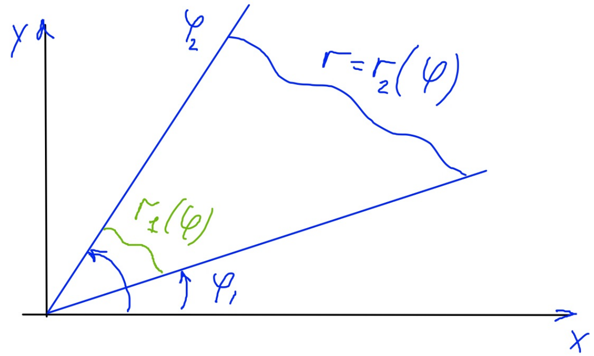


Cas important : Coordonnées polaires.

$$G(r,\varphi) = \begin{cases} r\cos\varphi = x \\ r\sin\varphi = y \end{cases}$$

$$\underset{r}{]0,\infty[} \times \underset{\varphi}{[0,2\pi[} \xrightarrow{G} \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2 \setminus \{\bar{0}\}}$$





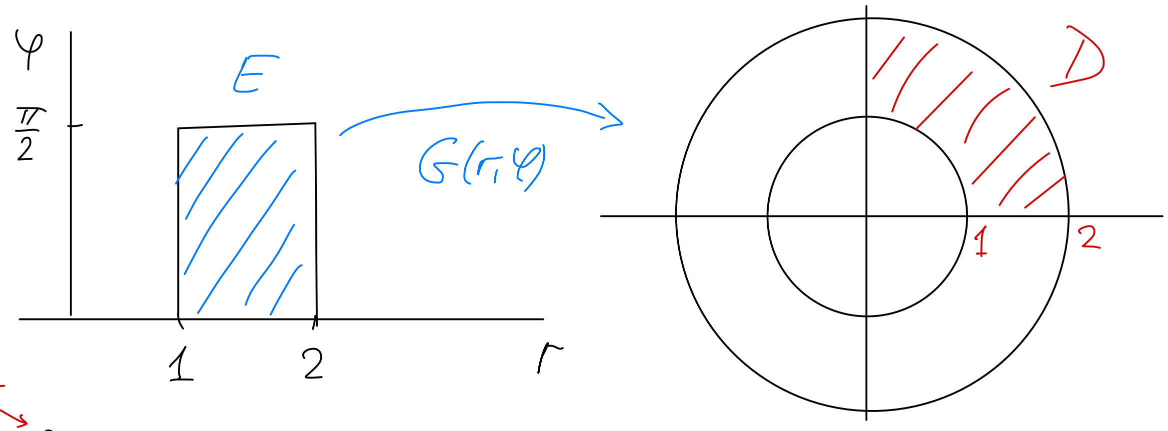
$$J_G(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\det J_G(r,\varphi)| = r \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{E = G^{-1}(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot \underbrace{r}_{|J_G|}\, dr\, d\varphi}$$

Ex. $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$, $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0, 1<\sqrt{x^2+y^2}<2\}$

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_E \sqrt{4-r^2}\cdot \underbrace{r}_{|\det J_G| = r}\,dr\,d\varphi =$$



$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 \sqrt{4-r^2}\,r\,dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_1 \sqrt{4-r^2}\,dr^2 =$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(-\int_1^2 (4-r^2)^{\frac12}\,d(4-r^2)\right) = \frac{\pi}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)(4-r^2)^{\frac32}\Big|_1^2 = \frac{\pi}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-3^{3/2}\right) = \frac{\pi}{6}\cdot 3^{3/2} = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{3}.$$

Ex. $f(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$; D est une boucle de la lemniscate de Bernoulli (1694)

$a>0$

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)\,,\quad \underbrace{x>0}_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}}.$$

En coordonnées polaires: $r^4 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi)$

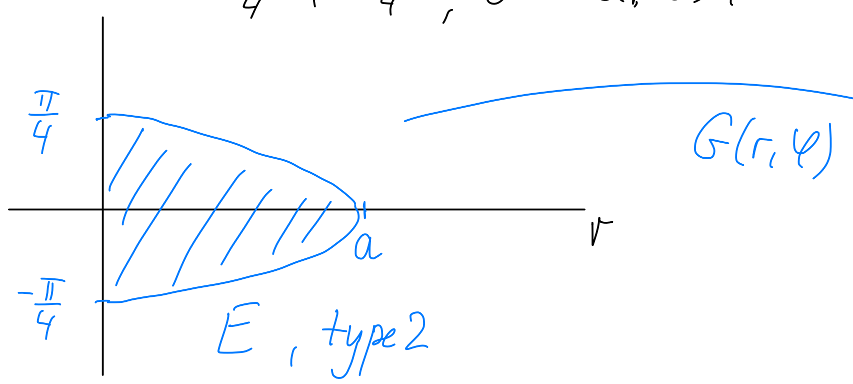
$r>0 \Rightarrow r^2 = a^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$

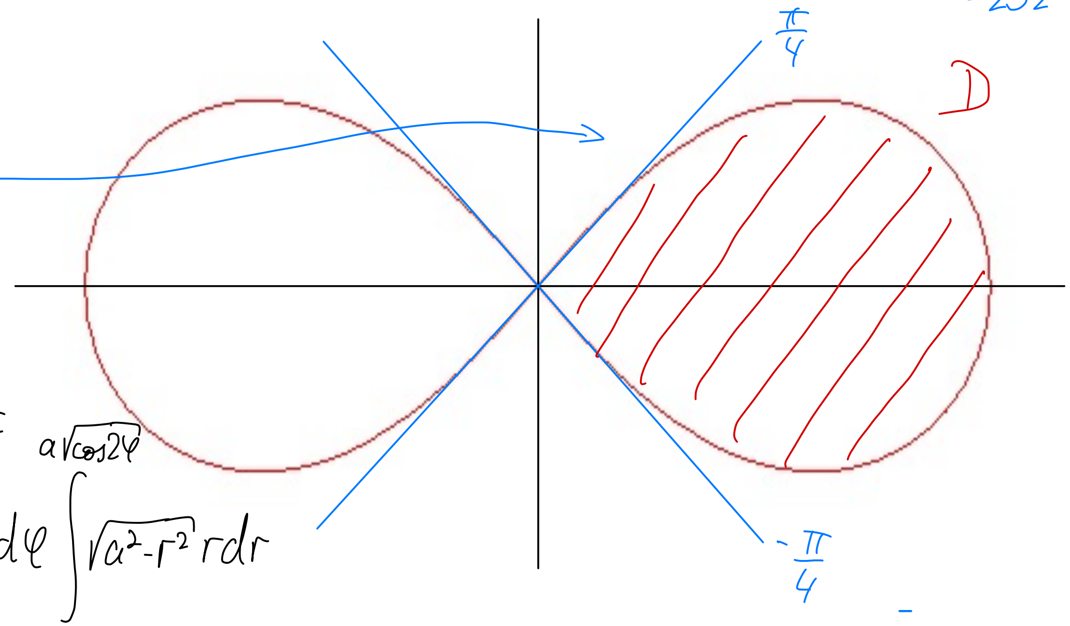
$r^2 = a^2\cos 2\varphi \Rightarrow \cos 2\varphi > 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4} \Rightarrow \\ \frac{3\pi}{4}<\varphi<\frac{5\pi}{4} \end{array}\right.$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow E = \left\{-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4},\ r<a\sqrt{\cos 2\varphi}\right\}$$

$-\frac{\pi}{4}<\varphi<\frac{\pi}{4}, \quad 0<r<a\sqrt{\cos 2\varphi}$





$$\Rightarrow \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint_E \sqrt{a^2-r^2}\,\underbrace{r}_{=|\det J_G|}\,dr\,d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{a^2-r^2}\,d(a^2-r^2) = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)(a^2-r^2)^{3/2}\Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = -\frac{1}{3}\left(a^2-a^2\cos 2\varphi\right)^{3/2}+\frac{1}{3}a^3 =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{3}a^3\, 2^{3/2}\,|\sin\varphi|^3+\frac{1}{3}a^3} \qquad \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi$$

$$\left(1-\cos 2\varphi\right)^{3/2} = \big(\underbrace{1-\cos^2\varphi}_{\sin^2\varphi}+\sin^2\varphi\big)^{3/2} = 2^{3/2}\left(\sin^2\varphi\right)^{3/2} = 2^{3/2}|\sin\varphi|^3$$

$$\iint = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3}a^3 2^{3/2} |\sin\varphi|^3 + \frac{1}{3}a^3\right) d\varphi = \frac{1}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}a^3 2^{3/2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin\varphi|^3 d\varphi =$$

fonction paire sur un intervalle symétrique => il suffit d'intégrer sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et multiplier par 2

$$= \frac{\pi a^3}{6} - \frac{1}{3} a^3 2^{3/2} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \, d\varphi$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi/4} (1-\cos^2\varphi)\, d(-\cos\varphi) = \frac{1}{3}\cos^3\varphi - \cos\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + 1 =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6} - 1\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}.$$

$$= \iint = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^3 \cdot 2^{3/2} \cdot 2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\overset{\sim 1{,}2}{8\sqrt{2}-10}}{3}\right) > 0.$$

Coordonnées sphériques

$$G(r,\vartheta,\varphi) = \begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

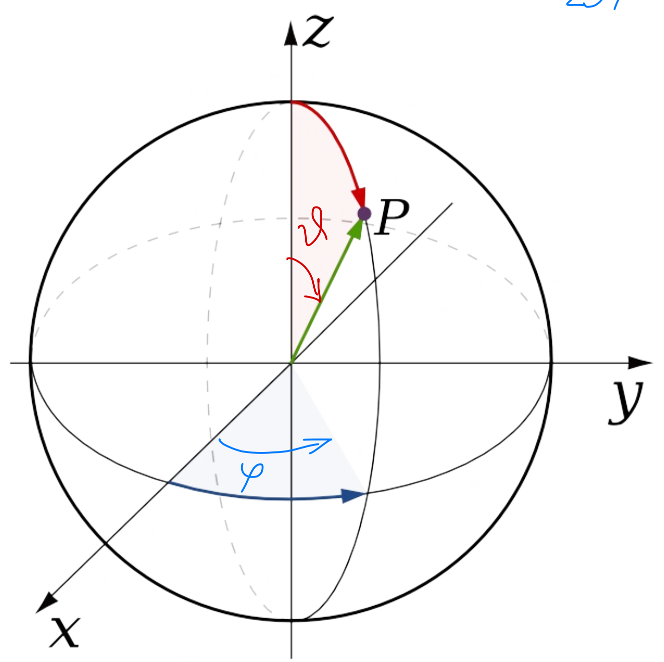
$$\vartheta = \arccos\frac{z}{r}, \quad r>0$$

Si $\sin\vartheta \neq 0 \Rightarrow$

$$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\vartheta}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r\sin\vartheta}$$

$$G : \underset{r}{]0,\infty[} \times \underset{\vartheta}{[0,\pi]} \times \underset{\varphi}{[0,2\pi[} \longrightarrow \underset{(x,y,z)}{\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}}$$



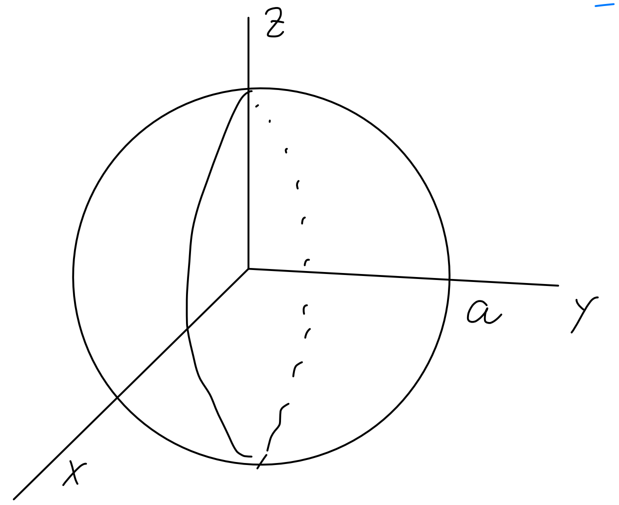
$$J_{G(r,\vartheta,\varphi)} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left|\det J_{G(r,\vartheta,\varphi)}\right| = \cancel{\times} - \cancel{\times} = \left| \underline{r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cos^2\varphi} + \underline{r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi} + \underline{r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta\sin^2\varphi} + \underline{r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi} \right| = \left|r^2\cos^2\vartheta\sin\vartheta + r^2\sin^3\vartheta\right| = \left|r^2\sin\vartheta\right|$$

Si $0<\vartheta<\pi$, $r>0 \Rightarrow \left|\det J_{G(r,\vartheta,\varphi)}\right| > 0 \Rightarrow G$ est Bijective.

$$\boxed{\left|\det J_{G(r,\vartheta,\varphi)}\right| = r^2\sin\vartheta.}$$

Ex. Volume d'une boule de rayon $a>0$



$$E=\{0<r<a,\ 0<\vartheta<\pi,\ 0<\varphi<2\pi\}=B(\bar{0},a)$$

$$V=\iiint_{B(\bar{0},a)} 1\,dx\,dy\,dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\int_0^{a}\underbrace{\sin\vartheta\cdot r^2}_{\substack{\shortparallel\\ |\det J_G(r,\vartheta,\varphi)|}}\,dr=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{a}r^2\,dr=2\pi\left(-\cos\vartheta\right)\Big|_0^{\pi}\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{a}=2\pi(1+1)\cdot\frac{1}{3}a^3=\frac{4}{3}\pi a^3$$

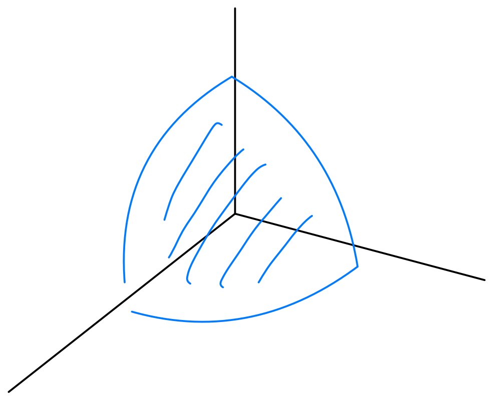
Masse totale d'un objet solide de densité donnée.

$$M=\iiint_V \underbrace{\rho(x,y,z)}_{\text{fonction densité}}\,dx\,dy\,dz$$ est la masse totale du volume V avec la densité $\rho(x,y,z)$.

Ex. Trouver la masse totale d'un secteur sphérique

$$S=\{x>0,\ y>0,\ z>0,\ x^2+y^2+z^2<a^2\}$$

avec la fonction de densité $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.



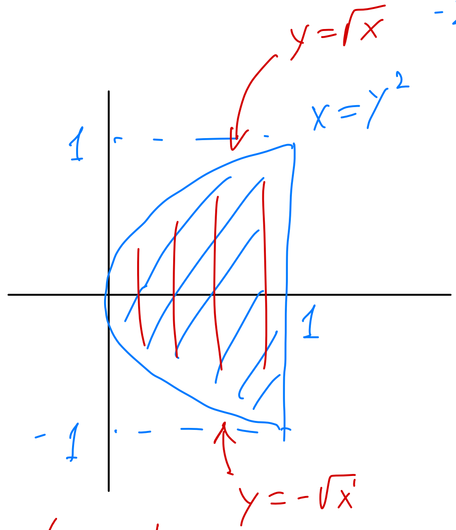
$$\Rightarrow \rho(r,\vartheta,\varphi) = \underbrace{r^2\sin^2\vartheta}_{x^2+y^2} \quad \text{en coordonnées sphériques.}$$

$$E = \left\{ 0<r<a,\ 0<\vartheta<\frac{\pi}{2},\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2} \right\}.$$

$$M = \iiint\limits_S (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^a \underbrace{r^2\sin^2\vartheta}_{\rho}\ \underbrace{r^2\sin\vartheta}_{|J_G|}\,dr = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\,d\vartheta \int_0^a r^4\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\vartheta-1)\,d(\cos\vartheta)\cdot\frac{1}{5}a^5 = \frac{\pi a^5}{10}\left(\frac{1}{3}\cos^3\vartheta-\cos\vartheta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^5}{10}\left(-\frac{1}{3}+1\right) = \frac{\pi a^5}{15}.$$

Intégrales multiples sans calcul.



Ex.

$$\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \sin y \cos x \, dx = \int_{-1}^{1} dy \left(\sin y \left(\sin 1 - \sin y^2\right)\right)$$

☹

$$f(-y) = \underbrace{\sin(-y)}_{-\sin y}\left(\sin 1 - \sin\left((-y)^2\right)\right) = -\sin y\left(\sin 1 - \sin(y^2)\right) = -f(y)$$

$\Rightarrow$ f est impaire sur un intervalle symétrique !

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} f(y)\, dy = 0$$

Exercice: Calculer la même intégrale par changement d'ordre d'intégration.

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \cos x \sin y \, dy = \ldots \int_0^1 \cos x \cdot \left(-\cos(\sqrt{x}) + \underbrace{\cos(-\sqrt{x})}_{=\cos(\sqrt{x})}\right) dx = 0.$$

$$\underbrace{-\cos(\sqrt{x}) + \cos(\sqrt{x})}_{=0} \quad \text{cos est paire.}$$

Q1 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \le 1 \ , \ y \le 0\}$

Alors l'intégrale $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ s'écrit en coordonnées polaires

A. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r^2\,dr$

B. $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2\cos\varphi} r^2\,dr$

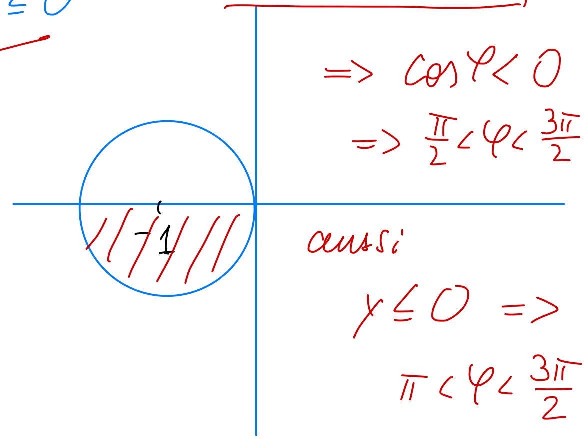
C. $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2\cos\varphi} r^3\,dr$

D. $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r^3\,dr$

$$(x+1)^2+y^2 \le 1 \longrightarrow (r\cos\varphi+1)^2 + r^2\sin^2\varphi \le 1 \Rightarrow$$

$$r^2\cos^2\varphi + 2r\cos\varphi + \cancel{1} + r^2\sin^2\varphi \le \cancel{1}$$

$$r^2 + 2r\cos\varphi \le 0 \Rightarrow \boxed{r \le -2\cos\varphi}$$



$\Rightarrow \cos\varphi < 0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

aussi

$y \le 0 \Rightarrow$

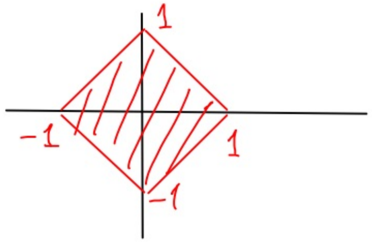
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{-2\cos\varphi} r^2 \cdot \underbrace{r}_{|\det J_G|}\,dr \Rightarrow \text{C}$$

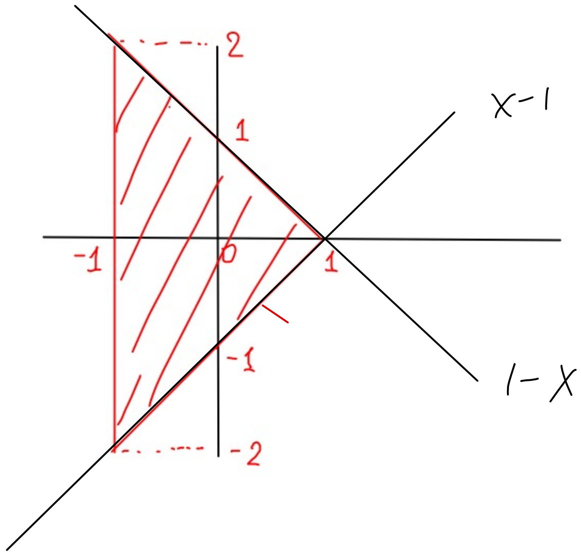
Q2 Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, \quad |y| \leq 1-x\}$.

Alors D est de la forme :

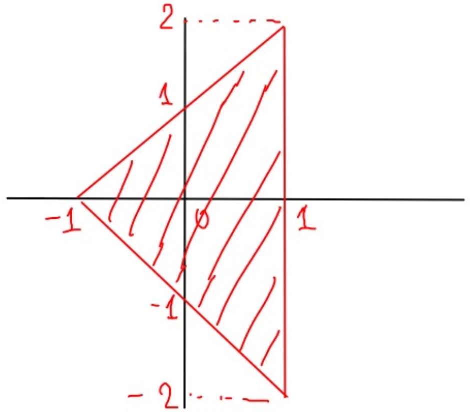
A



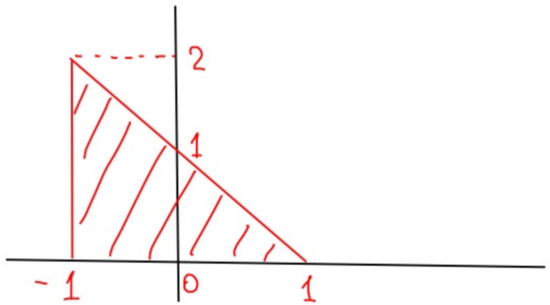
C.



B



D.



$x \geq -1$
$$\begin{cases} y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1-x \\ y < 0 \Rightarrow -y \leq 1-x \Rightarrow y \geq x-1 \end{cases}$$

Q3 L'intégrale $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} r\,dr$ exprime l'aire d'un(e)

A. secteur circulaire

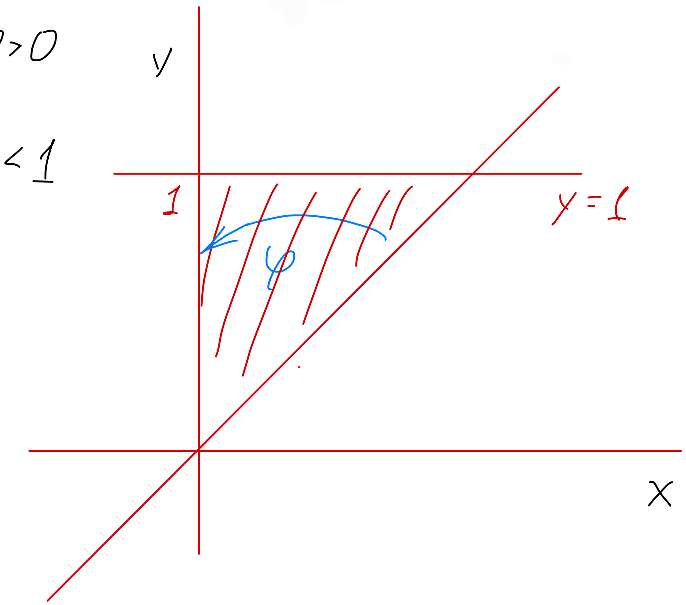
B. triangle

C. rectangle

D. tranche d'un cercle.

$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\varphi > 0$

$0 < r < \frac{1}{\sin\varphi} \Rightarrow r\sin\varphi < 1$



30 mai : voir les vidéos du cours 27
(liens sur Moodle),
étudier le PDF sur Moodle.
C01 : Quentin Becker, Q&R. Pas de Zoom.

1 juin : Cours en salle C01 : Revisions.
Exemples sur les sujets du cours entier.
Quentin Becker et Grégoire Tissier. Pas de Zoom

Examen final:

Lundi le 20 juin, 9h – 12h30

Salles CE1, CE2, CE3, CE4, CE6, CE1106

Comment réussir son examen.

(1) Lire et mémoriser les résumés

(2-3) Relire les notes du cours

Faire séries supplementaires, questions supplémentaires

(4) Relire les séries d'exercices. + les demonstrations

(5) Faire examens 2017, 2018

(6) Relire les résumés !!

(7) Faire examen - 2019

Bon courage!

et bonnes vacances !!