

Alors f est intégrable sur P et on a :

pour tout choix d'ordre d'intégration

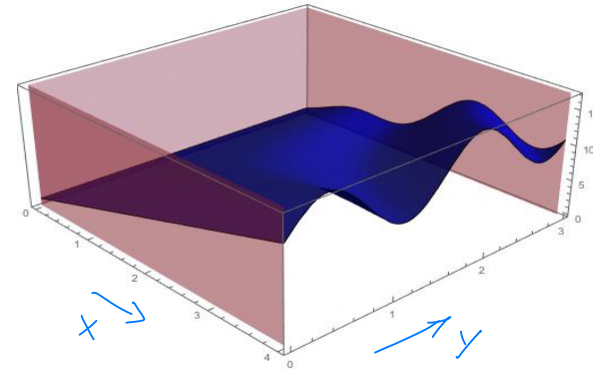
Alors
$$\iint_P f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

Ex. Calculer le volume du sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq (1 + 3x + x \sin(xy))\}$ continue

$$\begin{matrix} 1+x(3+\sin(xy)) > 0 \\ \geq 0 & \geq 3 \end{matrix}$$

$$P = [0, 4] \times [0, 3]$$

$\underset{x}{} \quad \underset{y}{}$



$$V = \iint_P (1 + 3x + x \sin(xy)) dx dy = \underbrace{\iint_P 1 dx dy}_{\text{linearité}} +$$

$$= (4-0) \cdot (3-0) = 12$$

$$3 \iint_P x dx dy + \iint_P x \sin(xy) dx dy = 3 \int_0^4 \left(\int_0^3 x dy \right) dx = 3 \int_0^4 xy \Big|_0^3 dx = 3 \int_0^4 3x dx = \frac{9}{2} x^2 \Big|_0^4 = 72$$

Autrement,

$$\int_0^3 \left(\int_0^4 3x dx \right) dy = \int_0^3 \left(\frac{3}{2} x^2 \Big|_0^4 \right) dy = \int_0^3 24 dy = 24y \Big|_0^3 = 72$$

$$\int_0^4 \left(\int_0^3 x \sin(xy) dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^3 \sin(xy) d(xy) \right) dx = \int_0^4 -\cos(xy) \Big|_0^3 dx = \int_0^4 (-\cos(3x) + 1) dx =$$

$\swarrow$ paramètre

$$= x - \frac{1}{3} \sin(3x) \Big|_0^4 = 4 - \frac{1}{3} \sin(12).$$

$$\Rightarrow \text{Le volume est } \underline{V = 12 + 72 + 4 - \frac{1}{3} \sin(12) = 88 - \frac{1}{3} \sin(12)}.$$

Considérons $\int_0^3 \left(\int_0^4 x \sin(xy) dx \right) dy$

$$\begin{aligned} \int_0^4 x \sin(xy) dx &= -\frac{1}{y} \int_0^4 \underbrace{x}_{u} d(\underbrace{\cos(xy)}_v) = -\frac{x}{y} \cos(xy) \Big|_0^4 + \frac{1}{y} \int_0^4 \cos(xy) dx = -\frac{x}{y} \cos(xy) \Big|_0^4 + \\ &+ \frac{1}{y} \frac{\sin(xy)}{y} \Big|_0^4 = -\frac{4}{y} \cos(4y) + \frac{1}{y^2} \sin(4y) \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{4y} - \frac{(4y)^3}{6} + \dots - \cancel{4y} (1 - \frac{1}{2}(4y)^2 + \dots)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\frac{(4y)^3}{6} + \overbrace{2y(4y)^2}^{y^3} + \dots}{y^2} = 0.$$

DL pour $\sin(t)$ et $\cos(t)$ autour de $t=0 \Rightarrow \sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \dots$; $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \dots$

$\leadsto$ il faut calculer $\int_0^3 \left(-\frac{4}{y} \cos(4y) + \frac{1}{y^2} \sin(4y) \right) dy = 4 - \frac{1}{3} \sin(12)$ par Thm de Fubini.

$$\int_0^3 \left(-\frac{4}{y} \cos(4y) + \frac{1}{y^2} \sin(4y) \right) dy$$

Les intégrales $\int -\frac{4}{y} \cos(xy) dy$ et $\int \frac{1}{y^2} \sin(4y) dy$ ne s'expriment pas en termes de fonctions élémentaires! ☹

Conclusion: Le choix prudent de l'ordre d'intégration est important.

$$\begin{aligned} \int_0^3 \frac{\sin(4y) - 4y \cos(xy)}{y^2} dy &= \int_0^3 \underbrace{(4y \cos(4y) - \sin(4y))}_u d \underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_v = \\ &= -\frac{\sin(4y)}{y} + 4 \cos(4y) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\cancel{4 \cos(4y)} - 16y \sin 4y - \cancel{4 \cos(4y)}}{y} dy = -\frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) + \\ &+ \underbrace{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y)}{y}}_{=4} - 4 + \int_0^3 16 \sin(4y) dy = -\frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) - 4 \cos(4y) \Big|_0^3 = \\ &= -\frac{1}{3} \sin(12) + 4 \cos(12) - 4 \cos(12) + 4 = \underline{4 - \frac{1}{3} \sin(12)} \quad \text{comme avant!} \end{aligned}$$



§5.2. Intégrales sur un domaine borné.

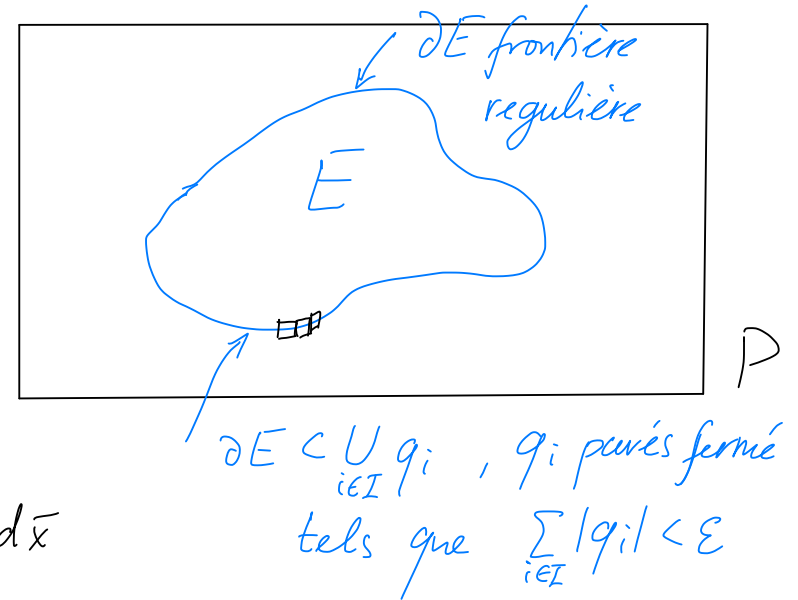
-233-

Déf Soit $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$; $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ fonction bornée sur E .
 P paré fermé

$$\text{Posons } \hat{f}(\bar{x}) = \begin{cases} f(\bar{x}), & \bar{x} \in E \\ 0, & \bar{x} \in P \setminus E \end{cases}$$

La fonction f est intégrable sur E si $\hat{f}$ est intégrable sur P .

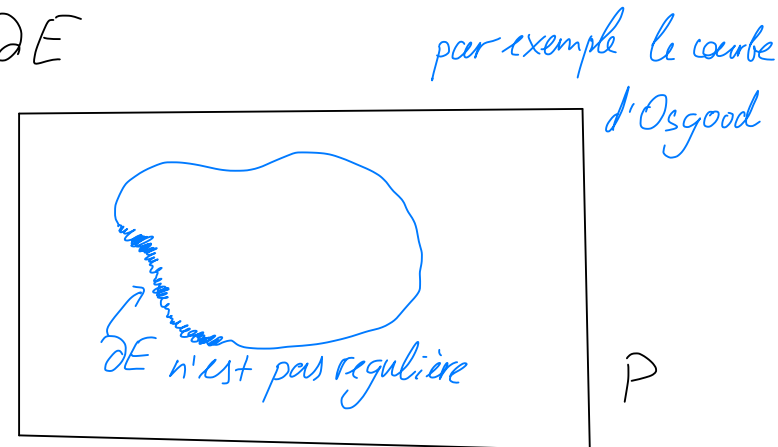
Dans ce cas on pose: $\int_E f(\bar{x}) d\bar{x} \stackrel{\text{dét}}{=} \int_P \hat{f}(\bar{x}) d\bar{x}$



Remarque. (1) La définition ne dépend pas du choix de paré fermé autour de E .

(2) Condition suffisante d'intégrabilité. Si $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur E , continue sur $\bar{E}$ et la frontière ∂E est assez régulière (de mesure nulle).

$\Rightarrow$ Alors $f(\bar{x})$ est intégrable sur E
(Voir [DZ, §14.2])



Thm de Fubini pour les domaines à frontière régulière.

(1) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle, $a < b$

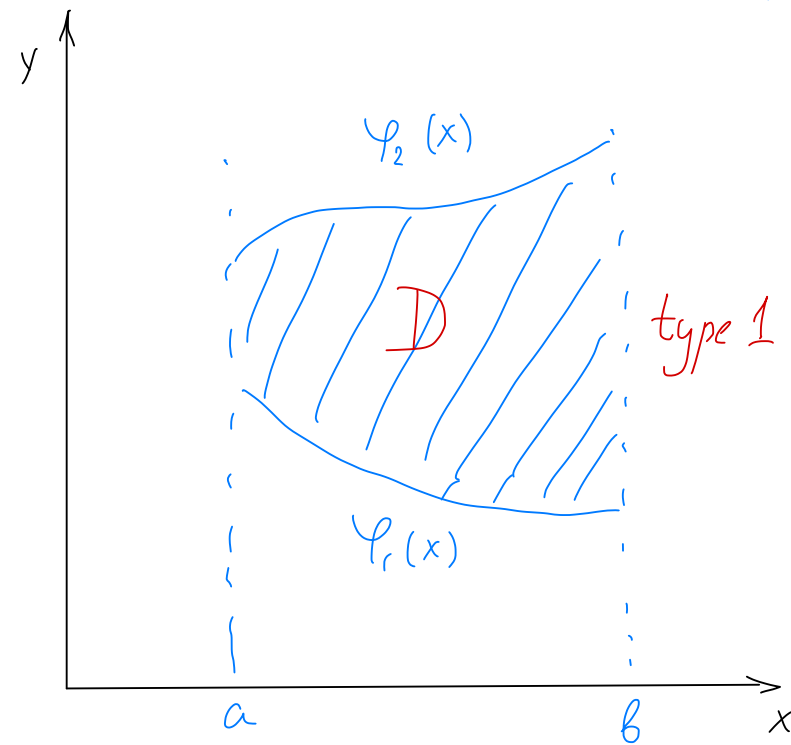
$\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues, telles que
 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \quad \forall x \in]a, b[.$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$

domaine à frontière régulière de type 1.

Alors pour toute fonction continue $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\underbrace{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx}_{\text{type 1}}$$



(2) Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}$ intervalle, $c < d$

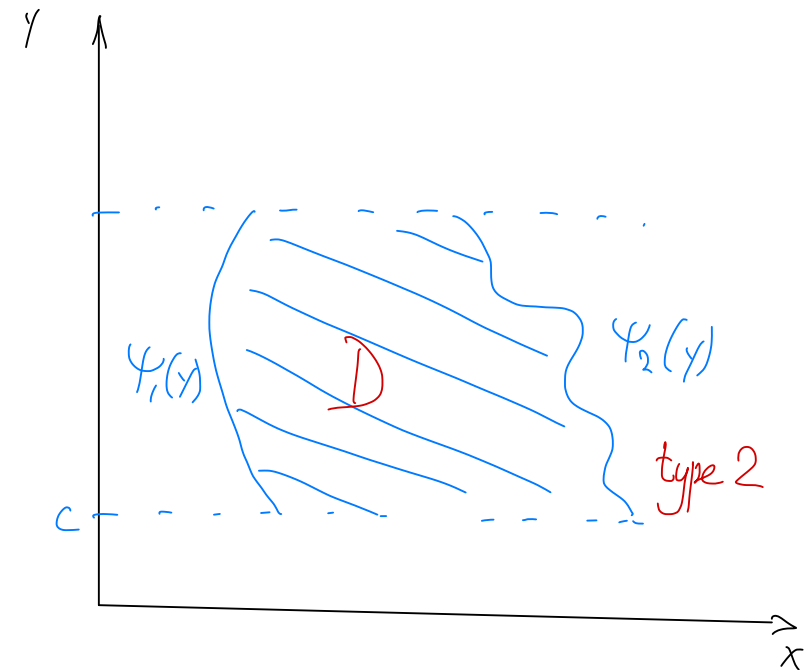
$\varphi_1, \varphi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues telles que
 $\varphi_1(y) < \varphi_2(y) \quad \forall y \in]c, d[.$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: c < y < d, \varphi_1(y) < x < \varphi_2(y)\}$

domaine à frontière régulière de type 2

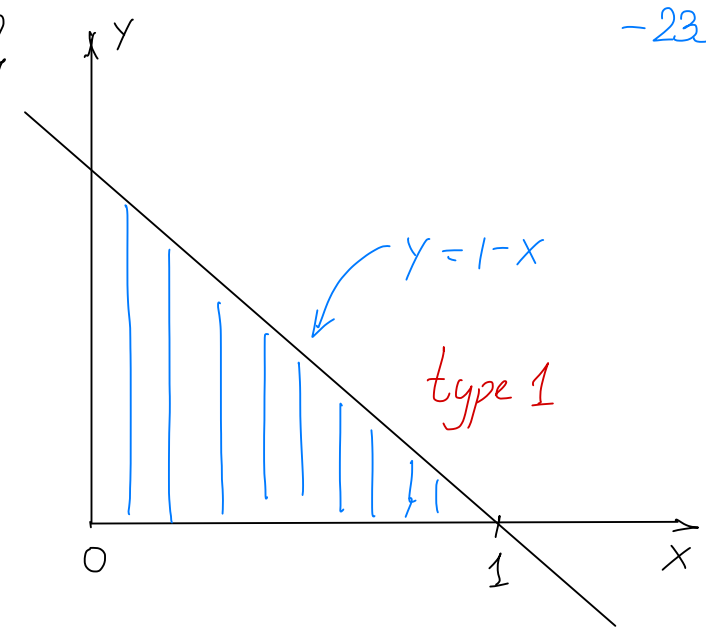
Alors pour toute fonction continue $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\underbrace{\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy}_{\text{type 2}}$$



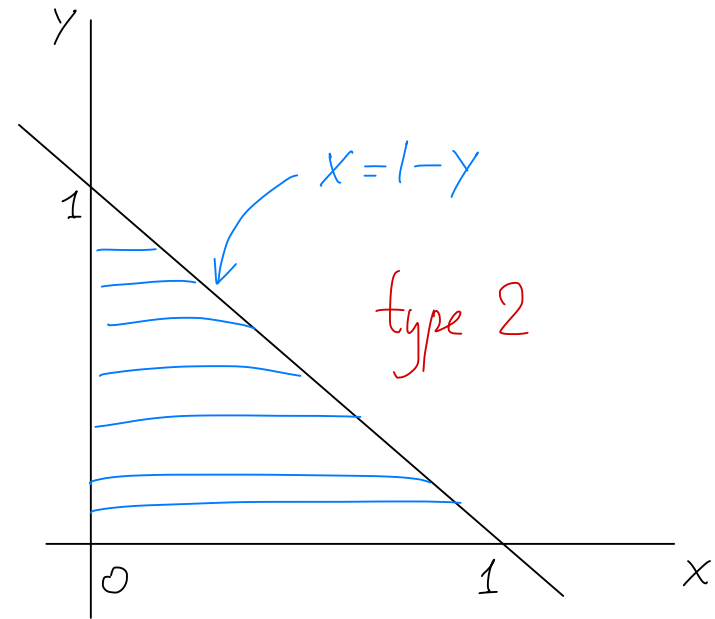
Ex 1. $f(x,y) = x^2 y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1-x\}$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x^2 y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^2 (1-x)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{10} x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \\ &= \frac{10-15+6}{60} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$



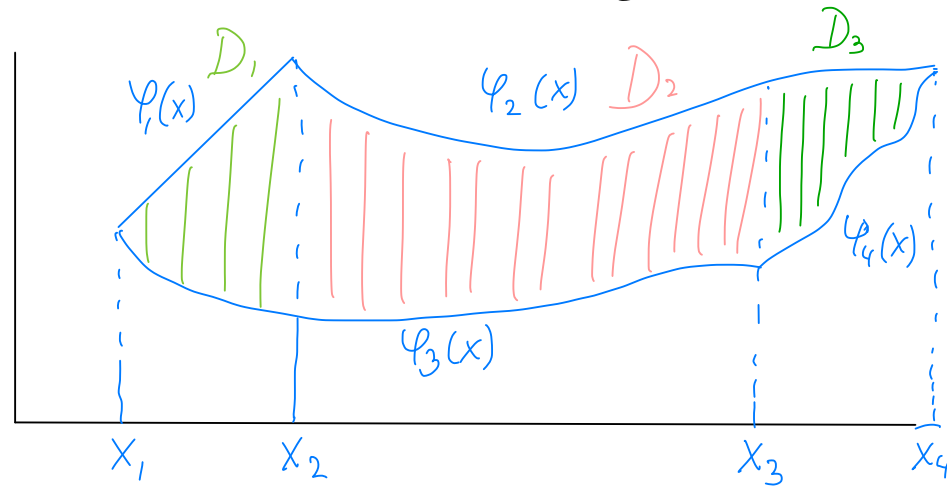
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, 0 < x < 1-y\}$ *type 2.*

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-y} x^2 y dx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{3} (1-y)^3 y dy = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (y - 3y^2 + 3y^3 - y^4) dy = \frac{1}{6} y^2 - \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{4} y^4 - \frac{1}{15} y^5 \Big|_0^1 = \\ &= \frac{10-20+15-4}{60} = \frac{1}{60} \end{aligned}$$



Si le domaine D n'est pas de type 1 ou 2?

$D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$
 domaines de type 1 ou 2



Il faut diviser le domaine
 en réunion des domaines
 de type 1 ou 2
 et utiliser l'additivité
 de l'intégrale

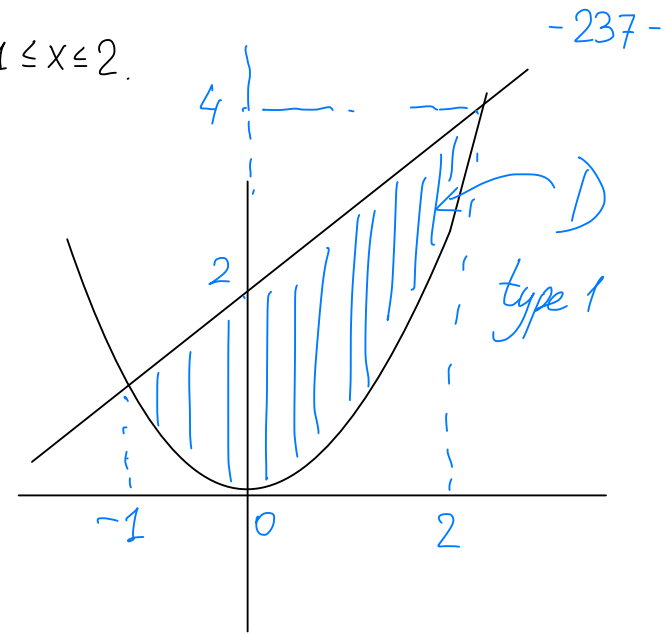
$$\textcircled{1} \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_{x_3}^{x_4} \left(\int_{\varphi_4(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

pour une fonction continue $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex 2. L'aire du domaine entre $y = x^2$ et $y = x + 2$, $-1 \leq x \leq 2$.

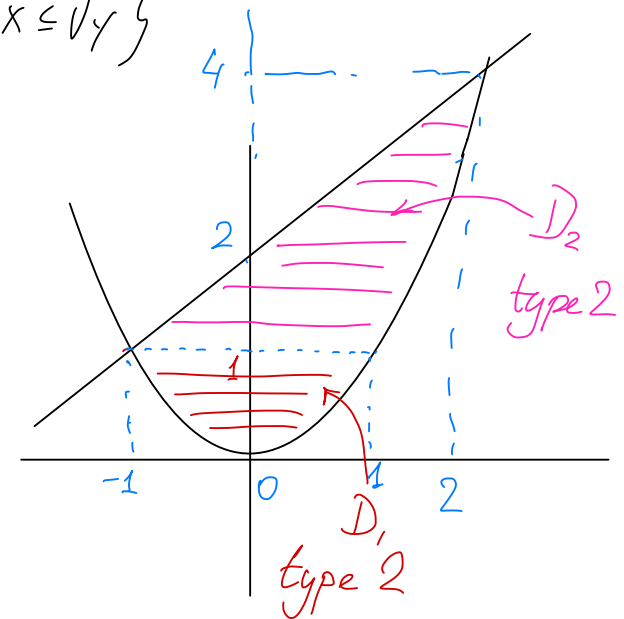
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, dx \, dy &= \int_{-1}^2 \left(\int_{x^2}^{x+2} dy \right) dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left. \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right|_{-1}^2 = \\ &= 2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 4, y - 2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D 1 \, dx \, dy &= \iint_{D_1} 1 \, dx \, dy + \iint_{D_2} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx \right) dy + \int_1^4 \left(\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{y} \, dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2) \, dy = 2 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \left. \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2 + 2y \right|_1^4 = \\ &= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y = x^2 &\Rightarrow x = \pm \sqrt{y} \\ y = x + 2 &\Rightarrow x = y - 2 \end{aligned}$$