Chapitre 5. Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables.

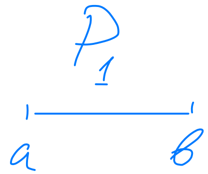
§5.1. Intégrale sur un pavé fermé.

Déf Un pavé fermé est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est le produit cartesien de n intervalles fermés bornés:

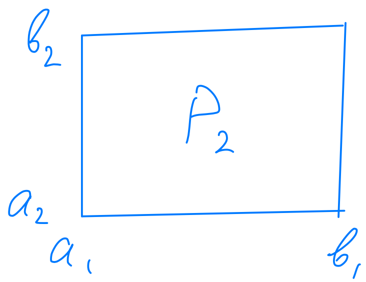
$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \qquad a_i < b_i \quad \forall i = 1 \dots n$$

Pavé ouvert $\mathring{P} =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$

Ex 1. Pavé dim = 1 $\Rightarrow$ $P_1 = [a, b]$ intervalle fermé borné



Pavé dim = 2 $\Rightarrow$ $P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



Déf Le volume d'un pavé fermé est défini par

$$|P| = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\ \dots\ (b_n-a_n)$$

notation pour le volume

Ex 1. $|P_1| = b-a$; $|P_2| = (b_1-a_1)(b_2-a_2)$ = l'aire du rectangle

Déf. Soit σ_j une subdivision de $[a_j, b_j]$; $a_j < b_j$

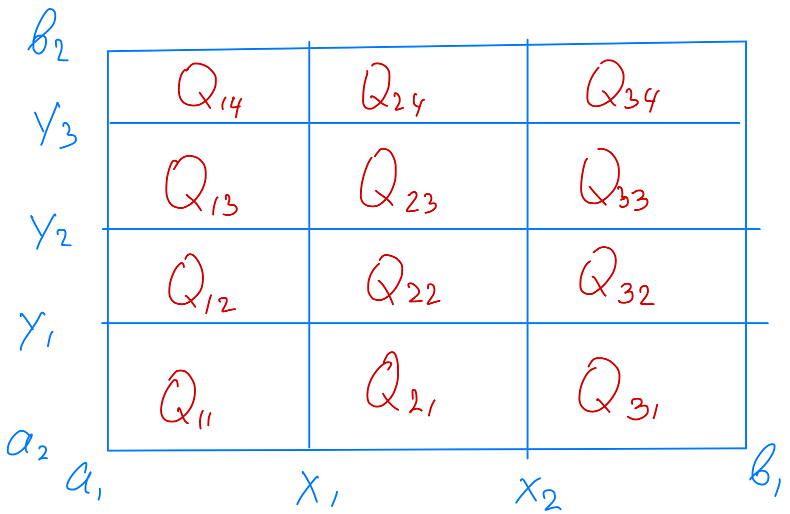
$$\sigma_j = \{a_j = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{n_j}^j < b_j\}$$

Alors $\sigma = (\sigma_1 \dots \sigma_n)$ est appelée une subdivision de P.

Ex 2. $P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\sigma = (\{a_1, x_1, x_2, b_1\}, \{a_2, y_1, y_2, y_3, b_2\})$

$D(\sigma)$ est la collection des pavés engendrés par la subdivision

$$P_2 = \bigcup_{\substack{i=1\dots3 \\ j=1\dots4}} Q_{ij}$$



En général on a une décomposition

$$P = \bigcup_{Q \in D(\sigma)} Q$$

$$|P| = \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q|$$

Soit $f : P \to \mathbb{R}$ (pavé fermé P) bornée sur P. Alors on définit les sommes de Darboux de f sur P.

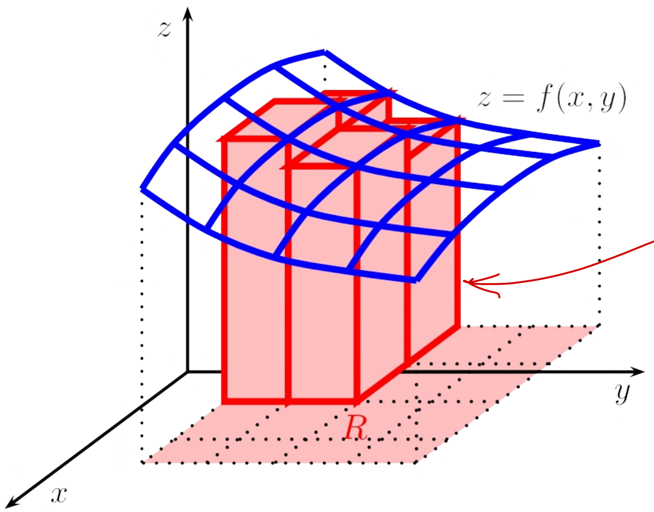
Déf Soit $D(\sigma)$ une collection des pavés fermés engendrée par la subdivision σ.

Alors: $$\underline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)\,|Q| \quad \text{où} \quad m(Q) = \inf_{\bar{x} \in Q} (f(\bar{x}))$$

$$\overline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)\,|Q| \quad \text{où} \quad M(Q) = \sup_{\bar{x} \in Q} (f(\bar{x})).$$

Alors $\underline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \sup \{ \underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P \}$ est la somme de Darboux inférieure pour $f(\bar{x})$ sur P.

$\overline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \inf \{ \overline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P \}$ est la somme de Darboux supérieure pour f sur P.



Somme de Darboux inférieure $\underline{S}_\sigma(f)$ associée à la subdivision donnée.

On a toujours $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$.

Déf. Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f: P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée.
Alors f est intégrable sur P si et seulement si

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

Dans ce cas, l'intégrale de f sur P est définie par

$$\int_P f(\bar{x})\,d\bar{x} = \iint_P \ldots \int f(x_1, \ldots x_n)\,dx_1 \ldots dx_n \overset{\text{déf}}{=} \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

notations

Ex 3. Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé. $f: P \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = C \in \mathbb{R}$ constante.
Alors f est bornée sur P. Elle est intégrable sur P.
Soit σ une subdivision de P.

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in \mathcal{D}(\sigma)} \underbrace{\inf_Q (f)}_{=C} |Q| = C \cdot \sum_{Q \in \mathcal{D}(\sigma)} |Q| = C \cdot |P| \quad \forall \sigma.$$

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in \mathcal{D}(\sigma)} \underbrace{\sup_Q (f)}_{=C} |Q| = C \cdot \sum_{Q \in \mathcal{D}(\sigma)} |Q| = C \cdot |P| \quad \forall \sigma$$

Donc $\underline{S}(f) = C \cdot |P| = \overline{S}(f) = \int_P C\,d\bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}) = C$ est intégrable sur P.

et on a : $\displaystyle\int_P C\,d\bar{x} = C\cdot|P|.$

En particulier, si $C = 1 \Rightarrow \displaystyle\int_P d\bar{x} = \iint_P\ldots\int dx_1\ldots dx_n = |P|$ le volume de P.

Si $\underset{\dim=1}{P} = [a,b] = \displaystyle\int_a^b 1\,dx = b-a$ = la longueur de l'intervalle $[a,b]$.

Intégrale double :

Si $\underset{\dim=2}{P} = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2] = \displaystyle\iint_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} 1\cdot dx\,dy = (b_1-a_1)(b_2-a_2)$ - l'aire du rectangle P.

Intégrale triple :

Si $P = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$, $f(x,y,z) = C$

$$\Rightarrow \iiint_P C\,dx\,dy\,dz = C(b_1-a_1)(b_2-a_2)(b_3-a_3) = C\cdot|P|.$$

Thm Toute fonction continue est intégrable sur un pavé fermé.

Idée : Soit $f : \underset{\text{pavé fermé}}{P} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$ une fonction continue.

(1) Alors f est bornée sur P : P est un sous-ensemble compact $\Rightarrow$ une fonction continue atteint son min et max sur $P \Rightarrow f$ est bornée sur P.

(2) Intégrabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Si f est continue en chaque point de P

$$\Rightarrow \forall \bar{x}_0 \in P \ \exists \delta_{\bar{x}_0} : \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| \leq \delta_{\bar{x}_0} \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

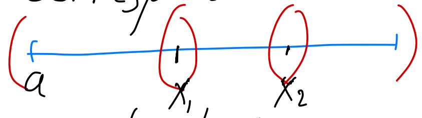
On considère le recouvrement de P par les boules ouvertes $B(\bar{x}_0, \delta_{\bar{x}_0})$

$\Rightarrow P \subset \bigcup_{\bar{x}_0 \in P} B(\bar{x}_0, \delta_{\bar{x}_0}) \Rightarrow$ Par Thm Heine-Borel-Lebesgue

il existe un sous-recouvrement fini : $P \subset \bigcup_{\bar{x}_j \in P} B(\bar{x}_j, \delta_j)$ (nombre fini des boules!)

Si $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B(\bar{x}_j, \delta_j) \Rightarrow |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)| \leq |f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_j)| + |f(\bar{x}_j) - f(\bar{x}_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Soit σ une subdivision qui correspond au recouvrement $\bigcup_{\bar{x}_j \in P} B(\bar{x}_j, \delta_j)$ $\qquad Q \subset B(\bar{x}_j, \delta_j)$



Alors $(\max_Q f - \min_Q f) \leq \varepsilon$ pour tout Q correspondant au recouvrement fini.

$$\Rightarrow \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \underbrace{(\max_Q f - \min_Q f)}_{\leq \varepsilon} \cdot |Q| \leq \varepsilon \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q| = \varepsilon |P|.$$

$$\Rightarrow \overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}(f) \text{ et } \underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{S}(f) \Rightarrow \underline{\overline{S}(f) - \underline{S}(f)} \leq \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{\varepsilon \cdot |P|}$$

$\overrightarrow{\inf_\sigma}$ $\qquad \overrightarrow{\sup_\sigma}$

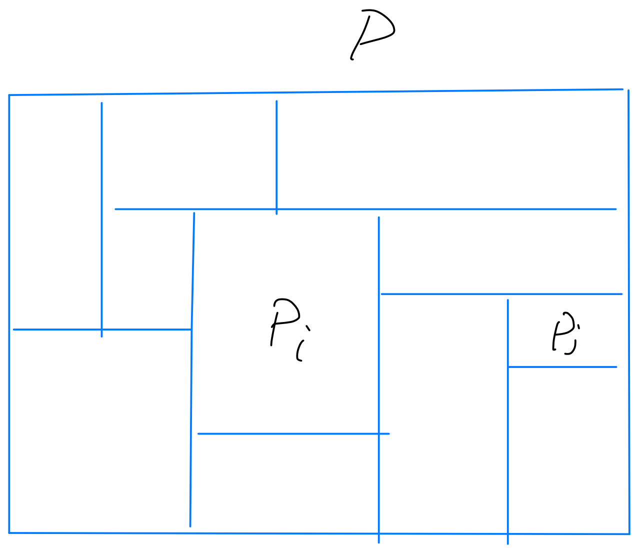
pour tout choix de $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \bar{S}(f) = \underline{S}(f) \Rightarrow f \text{ est intégrable sur } P.$$

Propriétés de l'intégrale.

(1) Additivité

Soit P un pavé fermé et $\{P_i\}_{i \in I}$ une famille dénombrable des pavé fermés tels que $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ et $\mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j = \emptyset,\ i \neq j$



Alors pour toute fonction continue $f : P \to \mathbb{R}$

on a $\displaystyle\int_P f(\bar{x})\,d\bar{x} = \sum_{i \in I} \int_{P_i} f(\bar{x})\,d\bar{x}$

(2) Linéarité : Soit P un pavé fermé ; $f, g : P \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Alors $\displaystyle\int_P (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x}))\,d\bar{x} = \alpha \int_P f(\bar{x})\,d\bar{x} + \beta \int_P g(\bar{x})\,d\bar{x}$. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) Soit $\underset{\text{pavé fermé}}{f: P} \to \mathbb{R}$ bornée, intégrable sur P, et telle que

$$|f(\bar{x})| \leq K^{\in \mathbb{R}_{\geq 0}} \quad \forall \bar{x} \in P$$

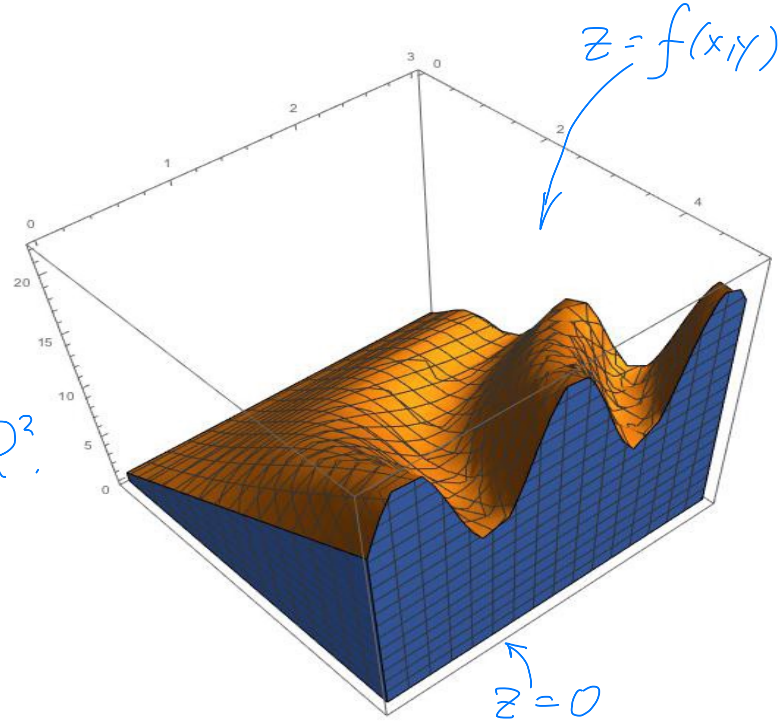
$$\Rightarrow \quad -K \leq f(\bar{x}) \leq K \quad \forall \bar{x} \in P$$

Alors $\quad -K|P| \leq \int_P f(\bar{x})\,dx \leq K \cdot |P|.$

Déf On définit le volume de l'ensemble sous la surface $z = f(x,y) \geq 0$ pour $f: P_{\subset \mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable par

$$V \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_P f(x,y)\,dx\,dy$$

V = le volume du sous-ensemble entre $z = 0$ et $z = f(x,y) \geq 0$ au dessus du pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^2$.



Thm. (Fubini) Soit $f : \underset{\text{pavé fermé}}{P} \subset \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{continue}]{} \mathbb{R}$, $P = \underset{X_1}{[a_1\, b_1]} \times \underset{X_2}{[a_2\, b_2]} \times \ldots \times \underset{X_n}{[a_n\, b_n]}$

Alors f est intégrable sur P et on a :

$$\int_P f(\bar{x})\,d\bar{x} = \underbrace{\int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \cdots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \ldots x_n)\,dx_1\right)dx_2 \ldots dx_{n-1}\right)dx_n}_{\text{pour tout choix de l'ordre d'intégration}}$$

variable d'intégration

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \ldots x_n)\,dx_1 = g_1(x_2 \ldots x_n) \quad ; \quad \to \quad \int_{a_2}^{b_2} g_1(x_2 \underbrace{\ldots x_n}_{x_3 \ldots x_n \text{ paramètres}})\,dx_2 = g_2(x_3 \ldots x_n), \text{ et ainsi de suite.}$$

$x_2 \ldots x_n$ sont des paramètres

variable d'intégration

$$\Rightarrow \int_{a_n}^{b_n} g_{n-1}(x_n)\,dx_n = \alpha \in \mathbb{R}.$$

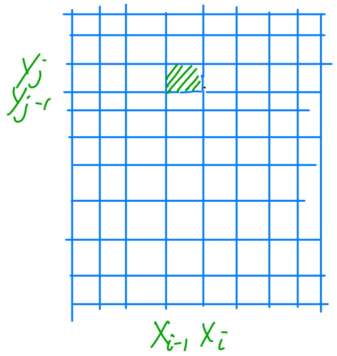
Important: On peut échanger l'ordre d'intégration sur un pavé fermé

Cas $n=2$. Soit $f : P = [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$ continue

Alors $$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_P f(x,y)\,dx\,dy$$

Idée : Trouver une subdivision de P assez fine telle que $P = \bigcup P_{ij}$ et $f(x,y) \simeq C_{ij}$ sur P_{ij}, $C_{ij} \in \mathbb{R}$ des constantes

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy \underset{\text{additivité}}{=} \sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx \right) dy \overset{\text{linéarité}}{=}$$



$$= \sum_{ij} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{ij} C_{ij}\,(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) =$$

$$= \sum C_{ij}\,(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} C_{ij}\,dy \right) dx \approx \sum_{ij} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \right) dx \overset{\text{linéarité}}{=}$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$\boxed{/\!/\!/}$