

Extrema liés. Méthode des multiplicateurs de Lagrange.

-208-

Théorème (cas $n=2$) Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte.

Soient les fonctions $f, g: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Supposons que $f(x, y)$ admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$,
et que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ pour $g(x, y) = 0$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

le multiplicateur de Lagrange

Dém: Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \neq 0$ est similaire).

On a $g(a, b) = 0$ puisque (a, b) satisfait $g(x, y) = 0$.

$\Rightarrow$ Par TFI il existe une fonction $y = h(x)$ de classe C^1 au voisinage de $x = a$, telle que

$$h'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))} \quad \text{et} \quad g(x, h(x)) = 0.$$

Si (x, y) satisfait la contrainte autour de (a, b) , alors on peut remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x, y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable.

$$f(x, y) = f(x, h(x)) \Rightarrow \text{Extrema locaux de } f \Rightarrow f'(x, h(x)) = 0.$$

$\nearrow$
Sous condition $g(x, y) = 0$

$$f'(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot h'(x)$$

$\Rightarrow$ Si (a, b) est un point d'extremum sous la contrainte, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot h'(a); \text{ on a aussi } h'(a) \stackrel{\text{TFI}}{=} - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{v_1} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{v_2} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}}_{u_2 \neq 0} u_1$$

(1) Si $u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow \nabla f(a, b) = (0, v_2)$; $\nabla g(a, b) = (0, u_2) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v_2 = \lambda u_2$
 $\Rightarrow \underline{\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)}$

(2) Si $u_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (v_1, v_2) = \lambda(u_1, u_2) \Leftrightarrow \underline{\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)}$ $\square$

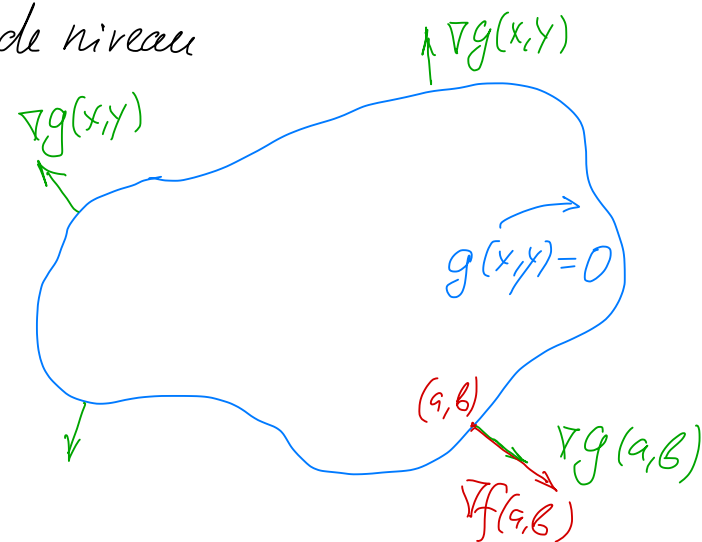
Remarque. Géométriquement, $g(x, y) = 0$ est une courbe de niveau

$\Rightarrow \nabla g(x, y) \perp$ à la courbe

Si (a, b) est un extremum local de $f(x, y)$

sur la courbe $\Rightarrow Df(a, b)_{(\vec{v} \text{ tangent à la courbe})} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(a, b) \perp \text{ à la courbe} \Rightarrow \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b) \Rightarrow \lambda \neq 0 \\ \nabla f(a, b) = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 0 : \text{Thm} : \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b), \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Plus généralement :

Thm. Soient $f, g_1, \dots, g_m : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions de classe C^1 , $m \leq n-1$

Soit $\bar{a} \in E$ un extremum de f sous les contraintes $g_1(\bar{x}) = \dots = g_m(\bar{x}) = 0$.

Supposons que les vecteurs $\nabla g_1(\bar{a}), \dots, \nabla g_m(\bar{a})$ sont linéairement indépendants.

Alors il existe un vecteur $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\nabla f(\bar{a}) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(\bar{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{a}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{a}).$$

En particulier, si on cherche un extremum de f sous la contrainte $g(\bar{x}) = 0$ on obtient les équations

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \lambda g(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{si } \nabla g(\bar{x}) \neq 0 \text{ pour } g(\bar{x}) = 0).$$

Ex 1 Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ (sphère de rayon 3).

$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ sur la sphère de rayon 3 au centre $(0, 0, 0)$.

Par le Thm des multiplicateurs de Lagrange, si $(x, y, z) \in \text{sphère}$ est un point d'extremum de $f(x, y, z)$, alors

alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (1) \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ (2) x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = x - 2y + 2z$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1, -2, 2) = \lambda (2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) \Rightarrow \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2 = 2\lambda y \\ 2 = 2\lambda z \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \text{on peut diviser par } \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} z \\ y = -z \end{cases} \quad (2) \Rightarrow \frac{1}{4} z^2 + z^2 + z^2 = 9$$

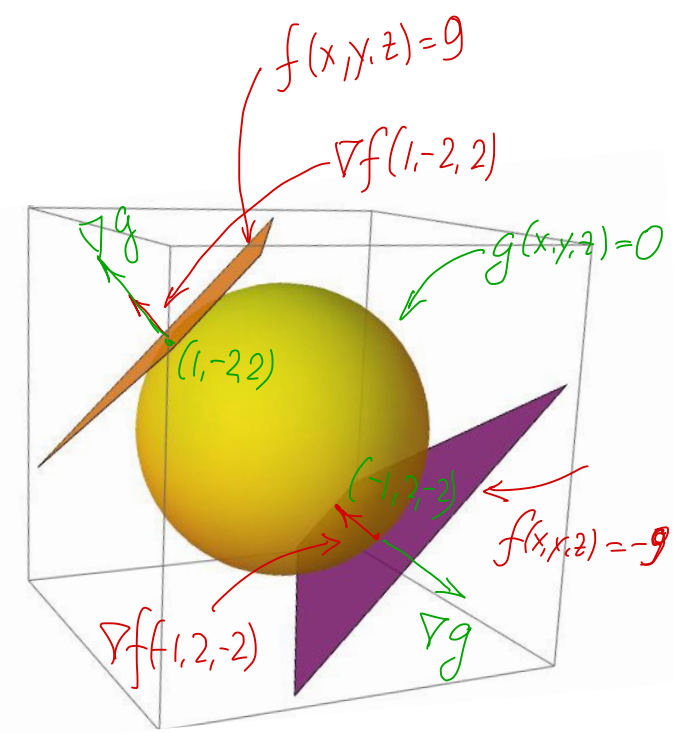
$$\frac{9}{4} z^2 = 9 \Rightarrow z^2 = 4$$

$$\Rightarrow z = \pm 2 \Rightarrow \begin{aligned} z=2 &\Rightarrow x=1, y=-2 \Rightarrow (1, -2, 2), \lambda = \frac{1}{2} \\ z=-2 &\Rightarrow x=-1, y=2 \Rightarrow (-1, 2, -2), \lambda = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$f(1, -2, 2) = 1 + 4 + 4 = 9 \leftarrow \text{max de } f \text{ sur la sphère}$$

$$f(-1, 2, -2) = -1 - 4 - 4 = -9 \leftarrow \text{min de } f \text{ sur la sphère}$$

(Puisque la sphère est compact $\Rightarrow$
 f continue atteint son min et max sur la sphère)



Ex 2. Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = xyz$
 sous les contraintes $\begin{cases} g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases}$

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad \nabla g_2(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^3.$$

$$\nabla g_2(x, y, z) \stackrel{?}{=} k \nabla g_1(x, y, z) \Rightarrow$$

$$(y + z, x + z, x + y) \stackrel{?}{=} (k, k, k) \Rightarrow x = y = z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g_1(x, x, x) = 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ g_2(x, x, x) = 3x^2 - 8 = 0 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{matrix} 3x - 5 = 0 \\ 3x^2 - 8 = 0 \end{matrix}} \right\} \text{impossible!} \quad 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3} \neq 8.$$

$\Rightarrow \nabla g_1(x, y, z)$ et $\nabla g_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendants
 sous les contraintes.

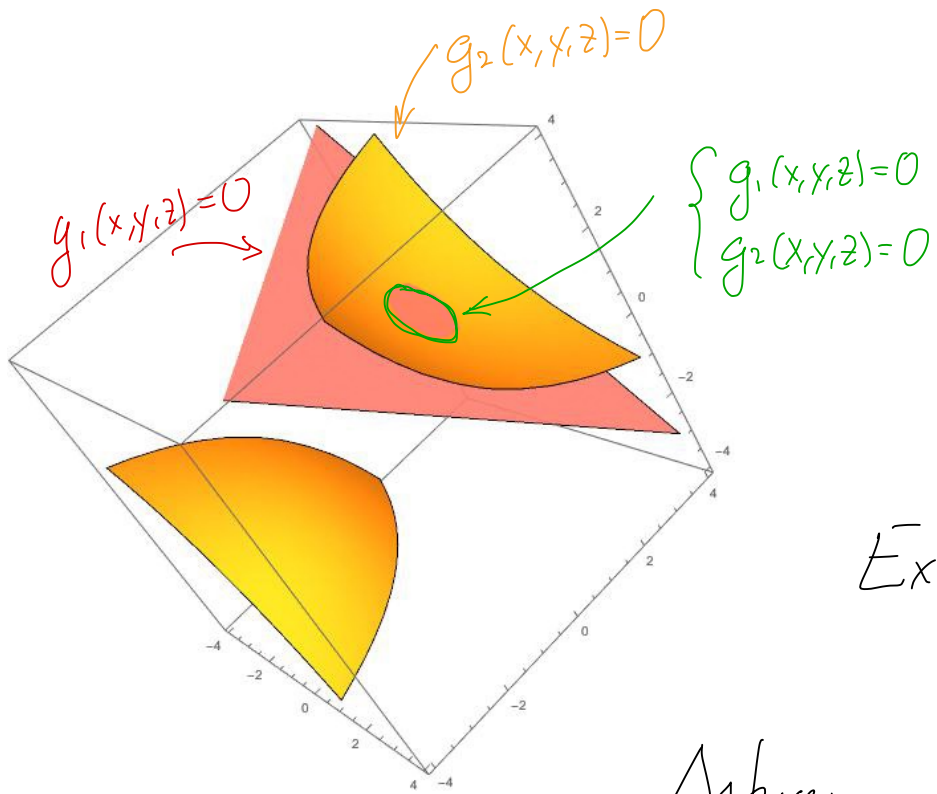
$\Rightarrow$ le Thm des multiplicateurs de Lagrange s'applique.
 et on obtient les équations:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = (yz, xz, xy) = \lambda_1 (1, 1, 1) + \lambda_2 (y + z, x + z, x + y) \\ g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x, y, z) = xyz$$

$$f(2, 2, 1) = f(1, 2, 2) = f(2, 1, 2) = 4 \quad \text{-- min de } f \text{ sous les contraintes}$$

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27} = 4 + \frac{4}{27} \quad \text{-- max de } f \text{ sous les contraintes.}$$



puisque $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ est un compact dans $\mathbb{R}^3$
 f est continue.

$\Rightarrow f$ atteint son min et max sur le compact
 f est de classe $C^1 \Rightarrow f$ atteint son min et max
 aux points donnés par le Thm du Lagrange.

Exercice : $\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ g_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ fermé
 démontrer que c'est borné

Astuce :

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{2}(y-5)^2 = 17$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\leq 17} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\leq 17} \Rightarrow x, y \text{ bornés}$

$$\Rightarrow z = 5 - x - y \text{ borné.}$$

Résumé : Méthode de démonstration.

-2/5-

1. Démonstration directe. $P \Rightarrow Q$

$P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$
logique, faits connus

2. Par contraposée $P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

3. Disjonction des cas. $P \Rightarrow Q$

$P \begin{matrix} \nearrow \text{cas 1} \\ \vdots \\ \searrow \text{cas n} \end{matrix} \Rightarrow Q$

4. "Si et seulement si" $P \Leftrightarrow Q$

$\rightarrow (1) P \Rightarrow Q$ et $(2) Q \Rightarrow P$

$\rightarrow P \Leftrightarrow \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$

5. Par absurde. P

$\neg P \Rightarrow Q$, connue d'être fausse.

6. Par le principe des tiroirs. P

n objets $\rightarrow k$ tiroirs
 $\Rightarrow$ au moins 1 tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets
 $\nearrow$
plafond

7. Par récurrence

$P(n)$

Base

Hérédité

-216-

$$(a) P(n_0)$$

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$(b) P(n_0) \dots P(n_0+k)$$

$$\{P(n) \dots P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1)$$

$$(c) P(n_0)$$

$$\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)\} \Rightarrow P(n+1)$$

$P(n, m)$

$$(d) P(0, 0)$$

$$P(m, 0) \Rightarrow P(m+1, 0) \quad \forall m$$

$$P(m, n) \Rightarrow P(m, n+1) \quad \forall m, n$$

carré

$$(e) P(0, 0)$$

$$P(m, 0) \Rightarrow P(m+1, 0) \quad \forall m$$

$$P(m+1, n) \Rightarrow P(m, n+1) \quad \forall m, n$$

diagonale

Exemples: Choisir la méthode de démonstration.

Proposition 1 Dans une classe de 210 étudiants il existe au moins 9 personnes avec la même initiale du prénom.

tirours: $\frac{210}{26} = 8 + \frac{1}{13}, \quad \lceil 8 + \frac{1}{13} \rceil = 9$

Proposition 2. Il n'existe pas de nombres entiers a, b tels que $63a = 81 - 21b$
absurde $7(9a + 3b) = 81 \Rightarrow \underbrace{9a + 3b}_{\in \mathbb{Z}} = \frac{81}{7} \notin \mathbb{Z}$ absurde

Proposition 3. Pour tout $n \geq 2$ naturel, on a $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

réurrence: $n=2 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ vrai. $P(n+1): \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \xrightarrow{\text{supposons } P(n)} \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)(n(n+2))}{2n(n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)}$
 $\Rightarrow P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Proposition 4. Si $f: E \xrightarrow{\mathbb{C}\mathbb{R}^h} \mathbb{R}$ est dérivable en $\bar{x} = \bar{a} \in E$, alors elle est continue en $\bar{x} = \bar{a}$.
directe: $f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + \langle \nabla f(\bar{x}), \underbrace{(\bar{x} - \bar{a})}_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \Rightarrow 0 \\ \bar{x} \rightarrow \bar{a} \Rightarrow 0}} \rangle + r(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{a})$

Proposition 5. Pour tout $n \geq 1$ naturel, on a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

directe: $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$ (ou par récurrence).

Proposition 6 Pour tout couple $a, b \in \mathbb{Z}$ le nombre $(7a+4b)(a-3b)(2a+b)$ est pair.

par disjonction des cas :

(1) a est pair $\Rightarrow (7a+4b)$ est pair

(2) b est pair $\Rightarrow (2a+b)$ est pair

(3) a et b sont impairs $\Rightarrow (a-3b)$ est pair

$\Rightarrow (7a+4b)(a-3b)(2a+b)$ est pair
 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.