

Rappel: Fonction implicite: fonction définie par une équation.

Ex 3. $F(x,y) = 1 - ye^x + xe^y$ de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$F(x,y) = 0$ - la courbe de niveau =
= le graphique de la fonction $y = f(x)$ (si elle existe)
définie par $F(x,y) = 0$ au voisinage du point donné
(par exemple, $(0,1)$)

Alors : on cherche $y = f(x)$ telle que $F(x, f(x)) = 0 \forall x$ proche à 0

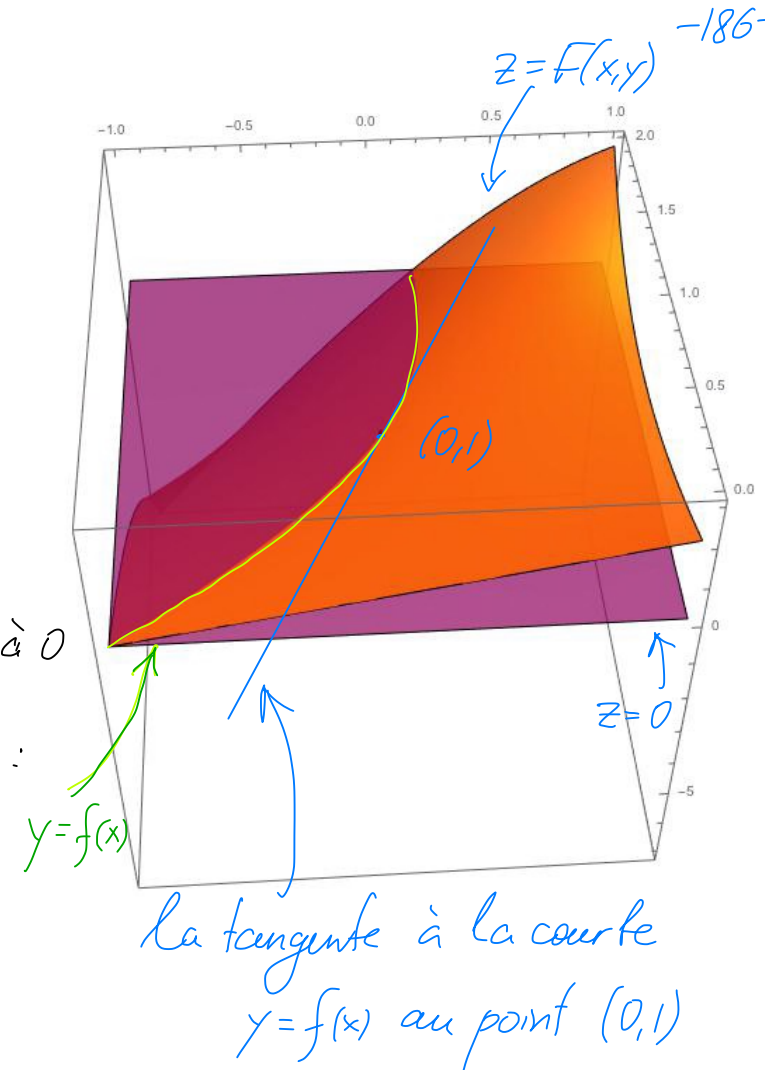
Supposant que $y = f(x)$ existe, on peut trouver sa dérivée:

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \text{ proche à } 0 \Rightarrow F'(x, f(x)) = 0$$

$$F'(x, f(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0.$$

$$\Rightarrow f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = - \frac{-ye^x + e^y}{-e^x + xe^y} \bigg|_{(0,1)} = - \frac{-1+e}{-1} = -1+e = \text{la pente}$$

de la tangente à $y = f(x)$
au point $(0,1)$



Théorème des fonctions implicites. (TFI)

$F: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$.
 $n \geq 2$ $\subset \mathbb{R}^n$ telle que

- (1) $F(\bar{a}) = 0$
- (2) $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$

Alors il existe un voisinage $B(\check{a}, \delta)$ de $\check{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction $f: B(\check{a}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$(1) a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$$

$$(2) F(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(\check{a}, \delta)$$

De plus, f est de classe C^1 dans un voisinage de $\check{a}$, et on a

$$(3) \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))} \quad \forall p = 1, \dots, n-1$$

Remarques. 1 Cas $n=2$

Soit $F(x, y): E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

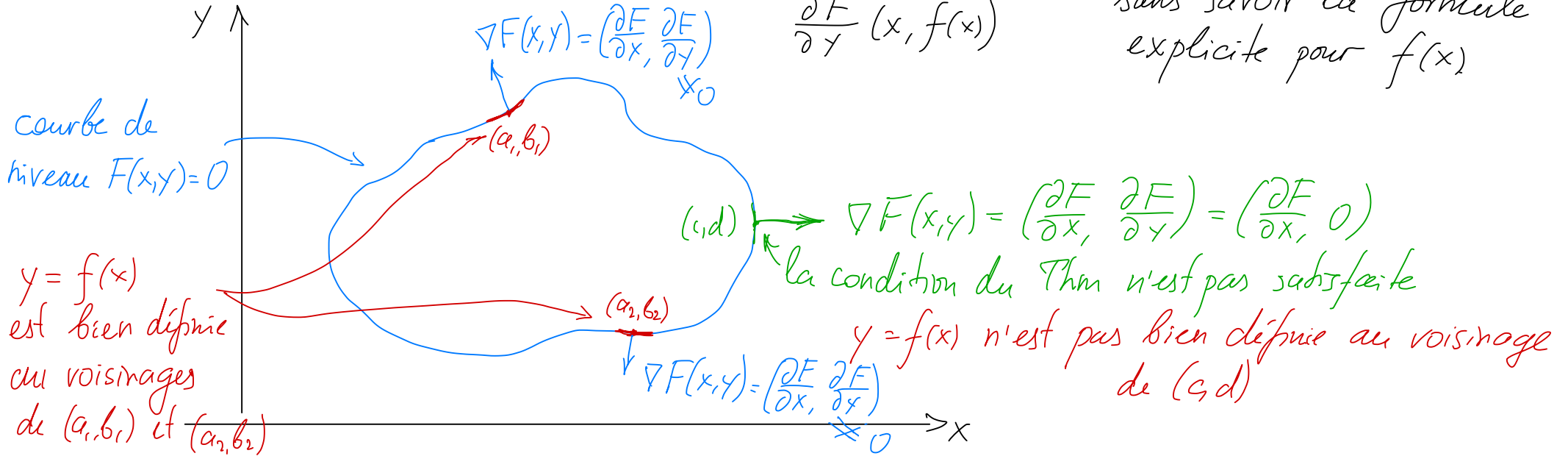
Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de (a, b) une fonction

$y = f(x)$ telle que

(1) $f(a) = b$

(2) $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x dans un voisinage de $x=a$

(3) $f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \Rightarrow$ on peut calculer $f'(a)$ sans savoir la formule explicite pour $f(x)$



Ex 2. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0$

Soit $y > 0 \Rightarrow$ par TFI $\exists y = f(x)$ et $f' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = - \frac{2x}{2y} \Big|_{y=\sqrt{1-x^2}} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$F(x,y) = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$

Directement: $f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

le même

2 Cas $n=3$. $F(x, y, z) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , t.g. $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Alors il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que

(1) $f(a, b) = c$

(2) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout couple (x, y) dans un voisinage de (a, b) .

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$.

Ex 4. $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$

Vérifier que $F(0, 0, 1) = 0$ et que $F(x, y, z) = 0$ définit autour de $(0, 0, 1)$ une fonction $z = f(x, y)$, telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

$F(0, 0, 1) = 0 + 0 + 1 \cos 0 - 1 = 0 \quad \checkmark \quad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = -y \sin z + \cos x \Big|_{(0, 0, 1)} = \cos 0 = 1 \neq 0.$

$\Rightarrow$ par le TFI la fonction $z = f(x, y)$ est bien définie au voisinage de $(0, 0)$, de classe C^1 .

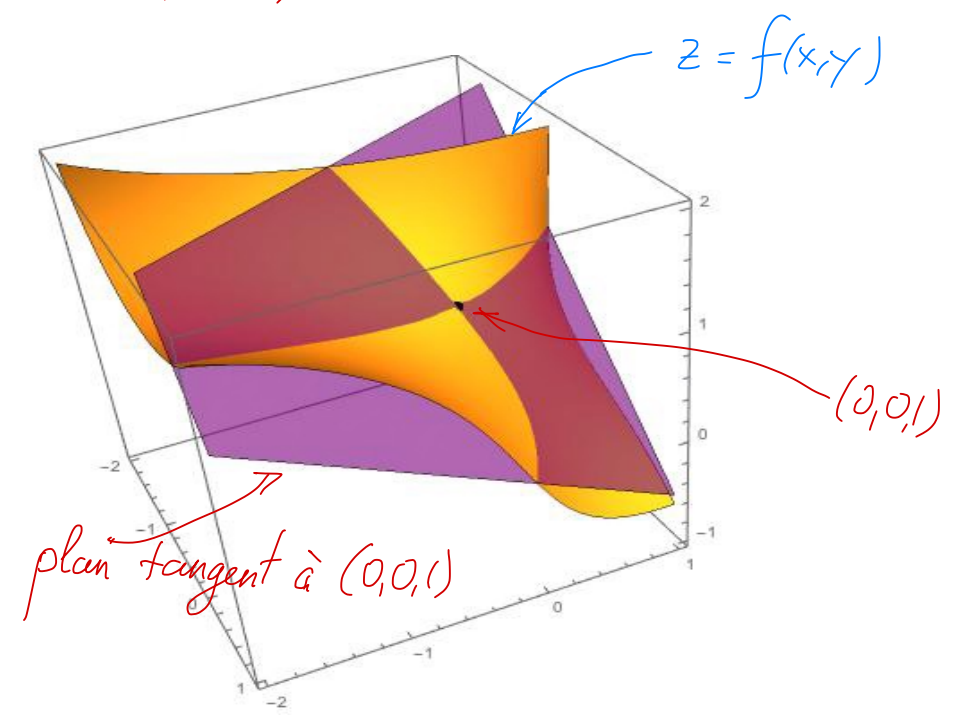
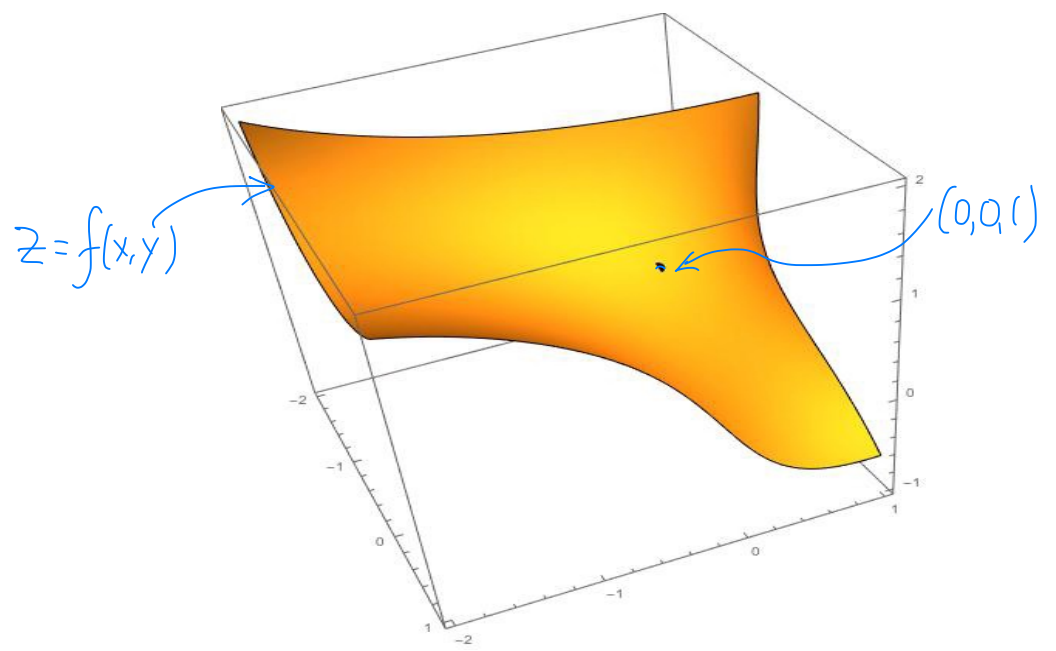
$\Rightarrow$ On peut calculer les dérivées partielles de $f(x, y)$ au point $(0, 0)$

$$F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} = - \frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x} \bigg|_{(0,0,1)} = - \frac{1}{1} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} = - \frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x} \bigg|_{(0,0,1)} = - \frac{\cos 1}{1} = -\cos 1$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \right) = (-1, -\cos 1)$$



On peut trouver l'équation du plan tangent : $z = f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle$

Application: Equation d'un (hyper)plan tangent.

En général, si $F(x_1, \dots, x_n)$ est de classe C^1 sur $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\exists i: 1 \leq i \leq n$ tel que

$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a}) \neq 0$ pour un $\bar{a} \in E: F(\bar{a}) = 0$ ($\Rightarrow \nabla F(\bar{a}) \neq \vec{0}$). Alors TFI implique que l'équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ définit une (hyper)surface

$x_i = f(x_1, \dots, \overset{\text{sans } x_i}{x_n})$ localement autour de $(a_1, \dots, \overset{\text{sans } a_i}{a_n})$ et f est de classe C^1 .

$\Rightarrow$ Si $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$, on peut écrire l'équation de l'(hyper)plan tangent à la surface de niveau $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{x} = \bar{a}$.

Si $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$, alors $D F(\bar{a}, \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{v}$ est tangent à la (hyper)surface de niveau.

$D F(\bar{a}, \bar{v}) = \underbrace{\langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \rangle}_{0 \neq} = 0 \Rightarrow$ pour tout vecteur $\bar{v}$ dans l'(hyper)plan tangent à $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{x} = \bar{a}$

$$\Leftrightarrow \bar{v} = (\bar{x} - \bar{a}) \perp \nabla F(\bar{a}).$$

$\Rightarrow$ L'équation de l'(hyper)plan tangent à $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{a}: F(\bar{a}) = 0$ est

$$\langle \nabla F(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle = 0$$

Ex 4. $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$, $\bar{a} = (0, 0, 1)$.

$$\nabla F(0, 0, 1) = (1, \cos 1, 1) \neq \bar{0}$$

$$\Rightarrow \langle (1, \cos 1, 1), (x-0, y-0, z-1) \rangle = 0 \Rightarrow x + y \cos 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow \underline{z = 1 - x - y \cos 1}$$

l'équation du plan tangent en $(0, 0, 1)$

Exercice. Vérifier qu'on obtient la même équation que $z = f(0, 0) + \langle \nabla f(0, 0), (x-0, y-0) \rangle$.

Exercice. Ex 5. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \Rightarrow F(x, y, z) = 0$ est la sphère de rayon 1.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$: $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$. Trouver une équation du plan tangent à la sphère au point (a, b, c) .

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \Big|_{(a, b, c)} = (2a, 2b, 2c) \neq \bar{0}$$

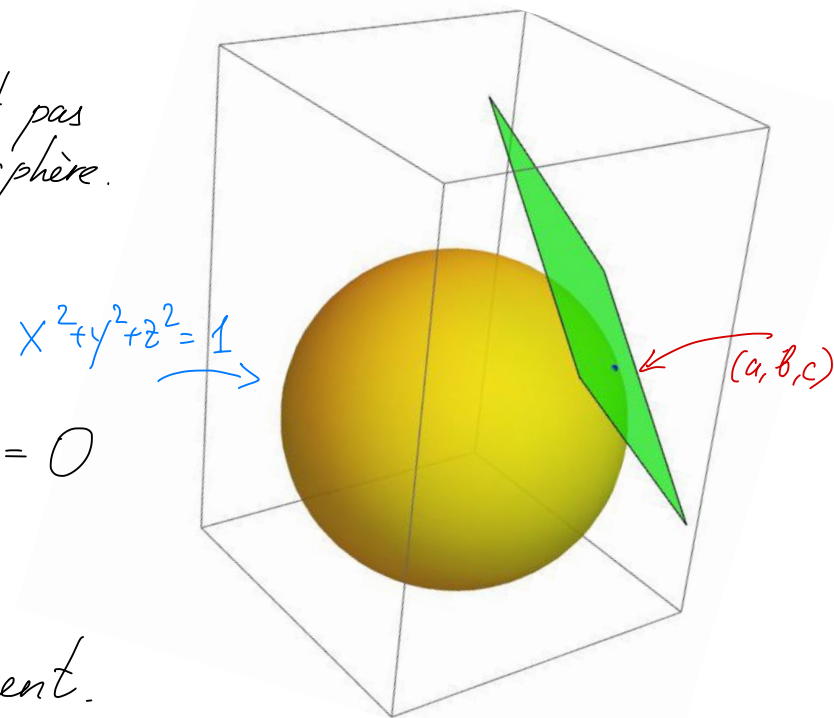
puisque $a=b=c=0$ n'est pas un point sur la sphère.

Alors $\langle \nabla F(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$ est l'équation du plan tangent au point (a, b, c)

$$\Rightarrow \langle (2a, 2b, 2c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 2a(x-a) + 2b(y-b) + 2c(z-c) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + cz - a^2 - b^2 - c^2 = 0 \text{ où } a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

$$\Rightarrow \underline{ax + by + cz = 1} \quad \text{l'équation du plan tangent.}$$



Ex 6. Cas $n=2$ $F(x,y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$.

Trouver l'équation de la tangente au point $(a,b) = (2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})$

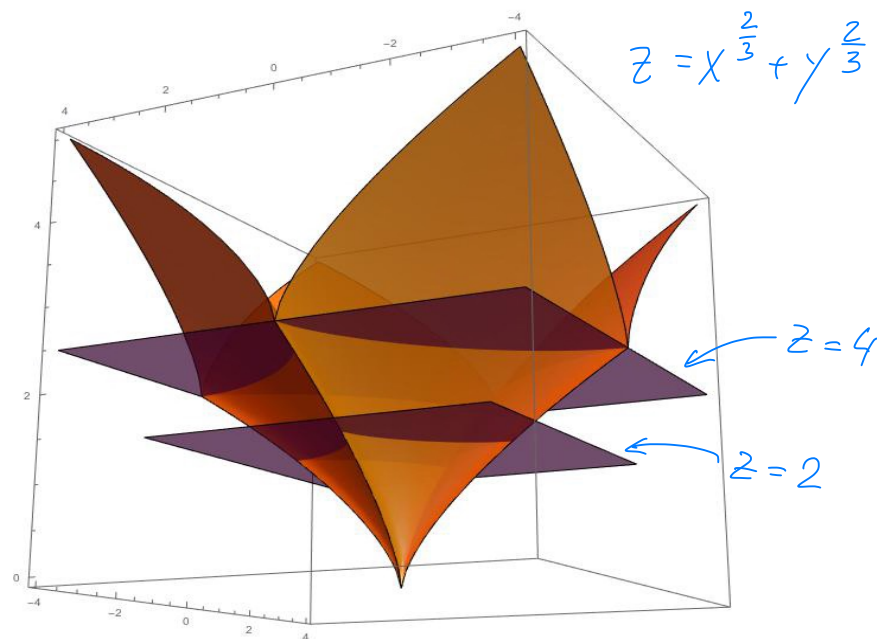
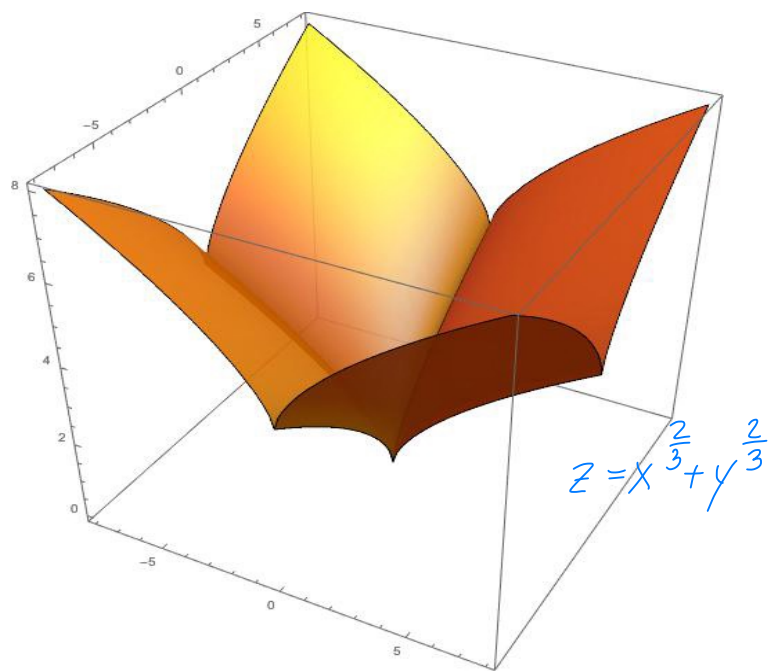
$$(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} + (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4 \Rightarrow F(a,b) = 0.$$

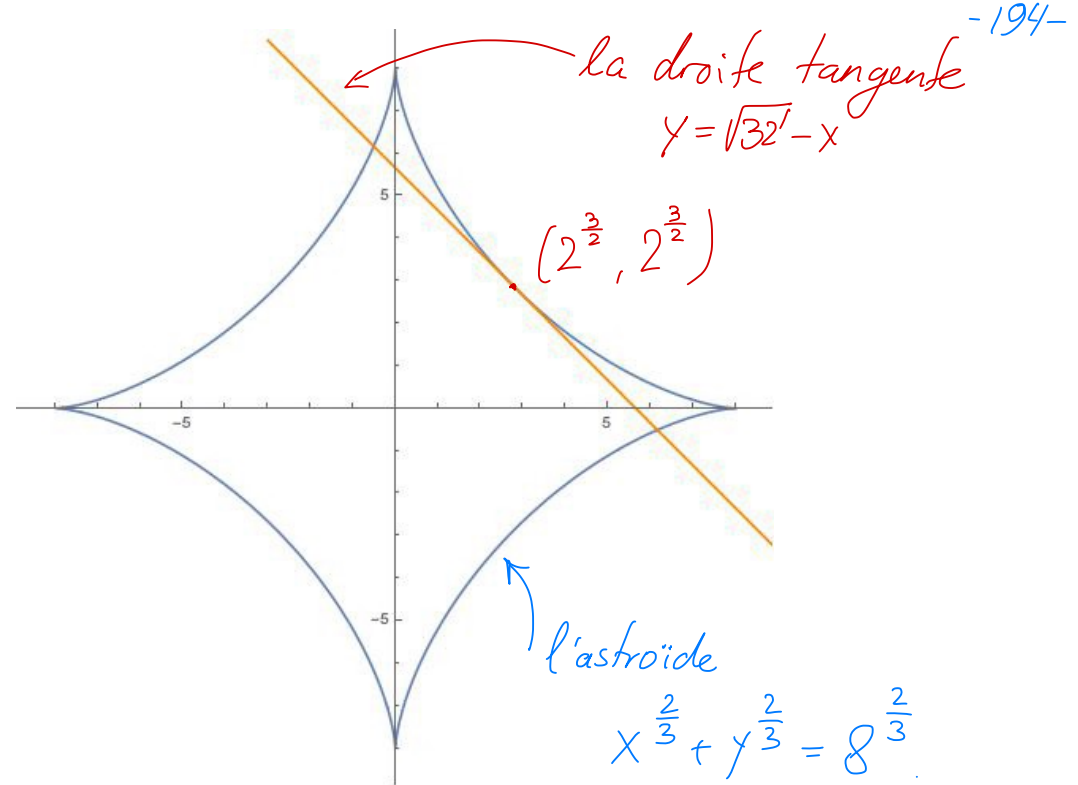
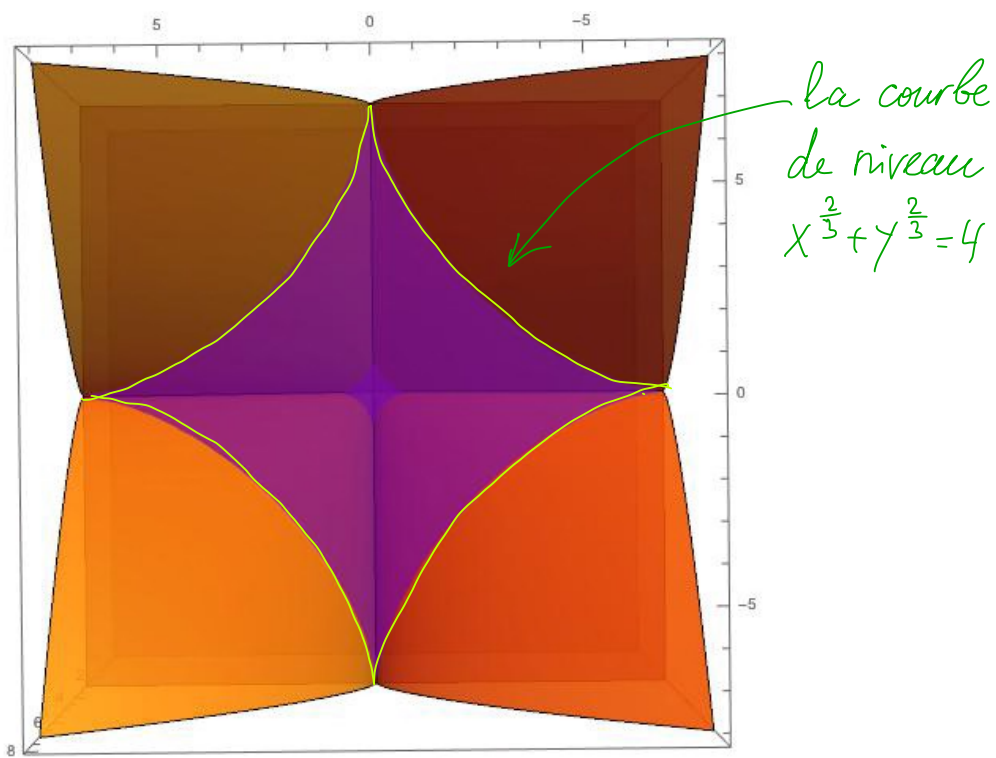
$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \right) \Big|_{(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})} = \left(\frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \neq \vec{0}.$$

$\Rightarrow$ L'équation de la tangente est $\langle \nabla F(a,b), (x-a, y-b) \rangle = 0$

$$\Rightarrow \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right), (x - 2^{\frac{3}{2}}, y - 2^{\frac{3}{2}}) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (x - 2^{\frac{3}{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{3} (y - 2^{\frac{3}{2}}) = 0$$

$$\Rightarrow x + y = 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y = 2^{\frac{5}{2}} - x = \sqrt{32} - x$$





Remarque. Cas $n=3$. Lien avec l'équation du plan tangent au graphique de $z=f(x,y)$

Si $F(x,y,z) = z - f(x,y)$ $\xrightarrow{\text{de classe } C^1} \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \Rightarrow \nabla F(x,y,z) \neq 0 \forall (x,y,z) \text{ où } z=f(x,y) \text{ est bien définie}$

$\Rightarrow$ Si $c = f(a,b) \Leftrightarrow (a,b,c) \in \text{surface de niveau } F(x,y,z) = 0$.

$\Rightarrow$ Par le TFI l'équation du plan tangent au point (a,b,c) est

$$\langle \nabla F(a,b,c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,c)}_{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}(x-a) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c)}_{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}(y-b) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,c)}_1(z-c) = 0$$

$\downarrow$
 $f(a,b)$

$$F(x,y,z) = z - f(x,y)$$

$\Rightarrow$ on retrouve l'équation

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \cdot (x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \cdot (y-b) + (z - f(a,b)) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$z = f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle$$



Lundi 9 mai : test blanc

10¹⁵ - 11⁰⁵

Semaines 1-9 du cours.

Corrections: 11¹⁵ - 12⁰⁰ (en classe et via Zoom)