Rappel: **Thm: Condition suffisante pour un extremum local d'une fonction.**

Soit $f: E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2, $\bar{a} \in E$: $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$

Alors (a) Si toutes les valeurs propres $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ de $Hess_f(\bar{a})$ sont positives $\Rightarrow$ min loc en $\bar{x} = \bar{a}$

(b) —— " —— sont négatives $\Rightarrow$ max loc en $\bar{x} = \bar{a}$.

(c) Si $\exists\ \lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0$ $\Rightarrow$ pas d'extremum en $\bar{x} = \bar{a}$.

Proposition. Cas $n=2$. Les conditions du Thm sur la matrice $Hess_f(\bar{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes. Posons $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \overset{\text{déf}}{=} Hess_f(\bar{a})$

Alors: (a) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det Hess_f(\bar{a}) > 0$ et $r > 0$.

(b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det Hess_f(\bar{a}) > 0$ et $r < 0$.

(c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det Hess_f(\bar{a}) < 0$.

Dém: Le det et la trace d'une matrice sont des invariants de conjugaison

$$O \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} O^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \det Hess_f(\bar{a}) = rt - s^2 = \det O\, \lambda_1 \lambda_2 \det O^{-1} = \lambda_1 \lambda_2 \\ Tr\, Hess_f(\bar{a}) = Tr\, O D O^{-1} = Tr\, \underbrace{O^{-1} O}_{Id} D = r + t = \lambda_1 + \lambda_2 . \end{array}$$

(c) $\det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 < 0 \iff \lambda_1$ et λ_2 sont de signes opposés.

(a) $\Rightarrow$ Supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ $\Rightarrow \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \lambda_1\lambda_2 > 0$.

Aussi : $\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0 \Rightarrow rt > s^2 \geq 0 \Rightarrow rt > 0 \Rightarrow r, t$ sont de même signe

$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \underset{>0}{\lambda_1} + \underset{>0}{\lambda_2} = r + t > 0$

$\Rightarrow r > 0$ $(t > 0)$

Alors $\det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r > 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que $\det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \lambda_1\lambda_2 > 0$

$\Rightarrow \lambda_1$ et λ_2 sont de même signe ; aussi $rt > s^2 \geq 0 \Rightarrow rt > 0$

$\left\{\begin{array}{l} rt > 0 \\ r > 0 \end{array}\right. \Rightarrow t > 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \underbrace{r+t}_{>0} = \lambda_1 + \lambda_2 > 0$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont de même signe} \\ \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Exercice : Démontrer la partie (b) (Série 11).

Résumé du cas $n=2$. Soit $\mathrm{Hess}_f(\bar a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$ f de classe C^2 au voisinage de $\bar a = (a_1, a_2)$.

(a) Si $\det \mathrm{Hess}_f(\bar a) = rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ variables (u,v) : $\underbrace{f(u,v) - f(\bar a)}_{>0} \simeq \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_1}_{>0}(u-a_1)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_2}_{>0}(v-a_2)^2$

$\Rightarrow$ min loc

(b) Si $\det \mathrm{Hess}_f(\bar a) = rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ variables (u,v) : $\underbrace{f(u,v) - f(\bar a)}_{<0} \simeq \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_1}_{<0}(u-a_1)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_2}_{<0}(v-a_2)^2$

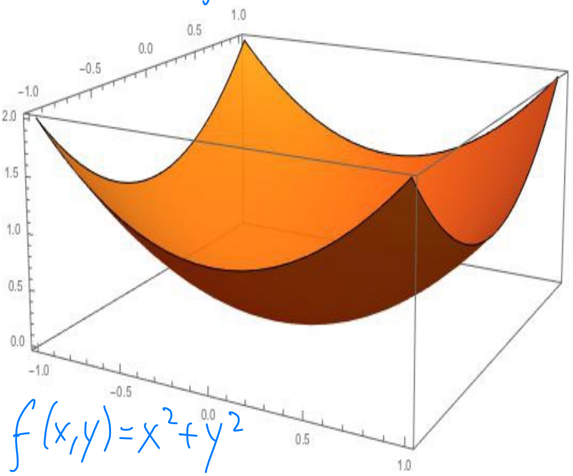
$\Rightarrow$ max loc

(c) Si $\det \mathrm{Hess}_f(\bar a) = rt - s^2 < 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ variables (u,v) : $f(u,v) - f(\bar a) \simeq \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_1}_{>0}(u-a_1)^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\lambda_2}_{<0}(v-a_2)^2$

pas d'extremum local

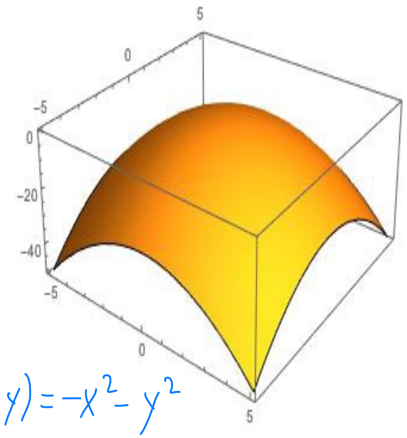
(d) Si $\det \mathrm{Hess}_f(\bar a) = 0$ $\Rightarrow$ pas de conclusion

(a) $\mathrm{Hess}_f(\bar 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$



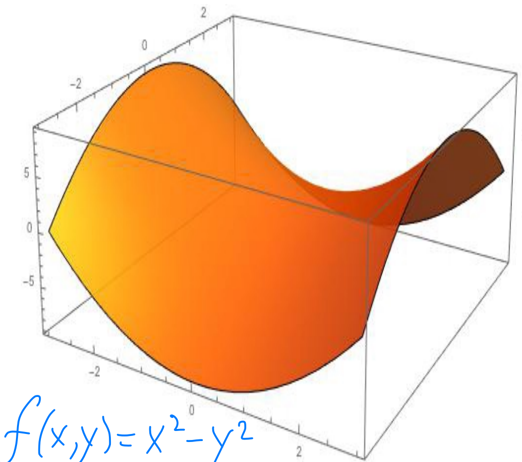
$f(x,y) = x^2 + y^2$

(b) $\mathrm{Hess}_f(\bar 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



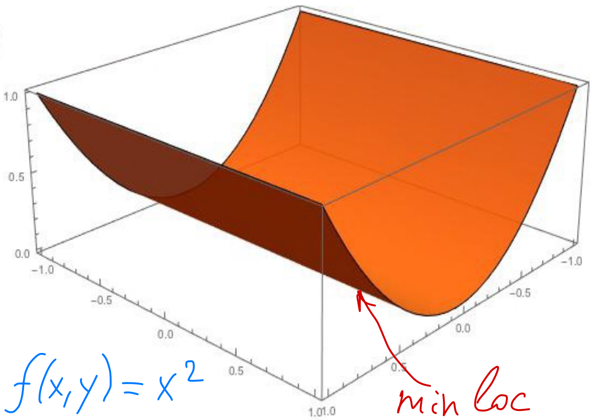
$f(x,y) = -x^2 - y^2$

(c) $\mathrm{Hess}_f(\bar 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$



$f(x,y) = x^2 - y^2$

(d) $\mathrm{Hess}_f(\bar 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



$f(x,y) = x^2$

min loc

Cas $n=3$. Conditions équivalentes aux condition suffisantes. f de classe C^2 au voisinage de $\bar{a}$.

$$\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Δ_1, Δ_2, Δ_3

Soit $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$

$\Delta_2 = \det \mathrm{Mat}_{2\times 2}$ indiquée

$\Delta_3 = \det \mathrm{Hess}_f(\bar{a})$.

($\mathrm{Hess}_f(\bar{a})$ est définie positive)

Alors: Si $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ est un point de min local

Si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ $\Rightarrow$ $\bar{a}$ est un point de max loc de f

Autrement si $\Delta_3 \neq 0$ $\Rightarrow$ pas d'extremum local en $\bar{a}$.

Si $\Delta_3 = 0$ $\Rightarrow$ pas de conclusion.

(sans démonstration)

Ex. $f(x,y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$ Trouver les points critiques et déterminer leur nature.

$\nabla f(x,y) = (-4y+2x,\ 3y^2+6y-4x)$. f est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ points critiques = points stationnaires.

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} 4y = 2x \\ 3y^2+6y-4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 3y^2+6y-8y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y(3y-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ y = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 2 points stationnaires : $(0,0)$ et $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

$\mathrm{Hess}_f(x,y) = ?$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y+6$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$

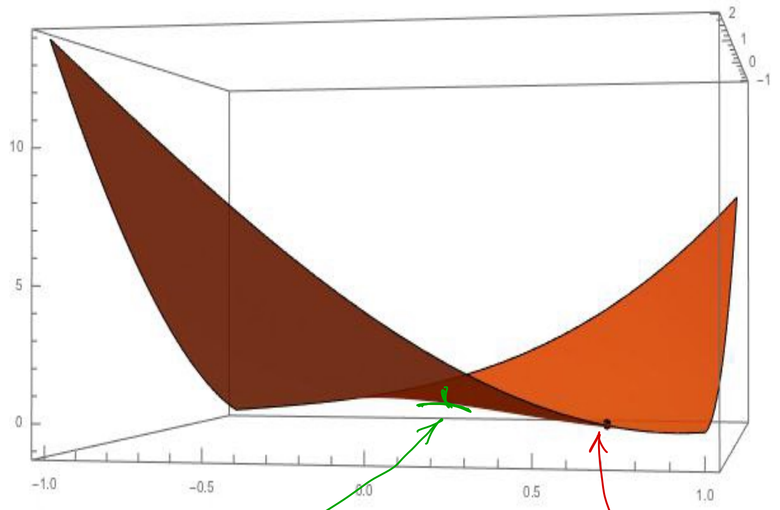
$$\Rightarrow \mathrm{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathrm{Hess}_f(0,0) = 12-16 = -4 < 0$$

$\Rightarrow$ pas d'extremum local en $(0,0)$

$$\Rightarrow \mathrm{Hess}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \mathrm{Hess}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 20-16 = 4 > 0$$

$r = 2 > 0$

$\Rightarrow$ min loc en $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$



$(0,0)$ pas d'extremum

$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ min loc

Min et max d'une fonction continue sur un compact.

Rappel: Théorème : Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$ atteint son min et max. $\left(\begin{array}{l} \exists \bar{c}_1 \in D : f(\bar{c}_1) = \min\limits_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ \exists \bar{c}_2 \in D : f(\bar{c}_2) = \max\limits_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \end{array} \right)$

Pour trouver $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ il faut:

(1) Trouver les points critiques $\{\bar{c}_i\}$ de f sur $\mathring{D}$. Calculer les valeurs $f(\bar{c}_i)$.

(2) Trouver les points $\{\bar{d}_j\}$ de min, max de $f(\partial D)$. Calculer les valeurs $f(\bar{d}_j)$

(3) Choisir le min et le max de $\{f(\bar{c}_i), f(\bar{d}_j)\}$.

Ex. $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2y + 3$. Trouver le min et le max absolues de f sur le disque $D = \{x^2+y^2 \leq 4\}$.

(1) Points critiques = points stationnaires (f est de classe $C^\infty(\mathring{D})$).

$\nabla f(x,y) = (2x, 4y-2) = (0,0) \Rightarrow x = 0, y = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2}) \in \mathring{D}$ est le seul point critique

$f(0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - 1 + 3 = \frac{5}{2}$ $\left(\mathrm{Hess}_f(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det = 8 > 0, 2 = r > 0 \Rightarrow \text{min loc} \right)$

$\partial D = \{x^2+y^2=4\} \Rightarrow x^2 = 4-y^2 \rightsquigarrow$ remplacer dans $f(x,y)$

$\tilde{f}(y) = \underbrace{4-y^2}_{x^2} + 2y^2 - 2y + 3 = y^2 - 2y + 7$ sur $[-2,2]$ compact $\subset \mathbb{R}$

$\tilde{f}'(y) = 2y-2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \Rightarrow (\pm\sqrt{3}, 1)$ points candidats.

$\underline{f(\pm\sqrt{3}, 1)} = \tilde{f}(1) = 1-2+7 = \underline{6}$

$\underline{\tilde{f}(-2)} = 4+4+7 = 15 = \underline{f(0,-2)}$

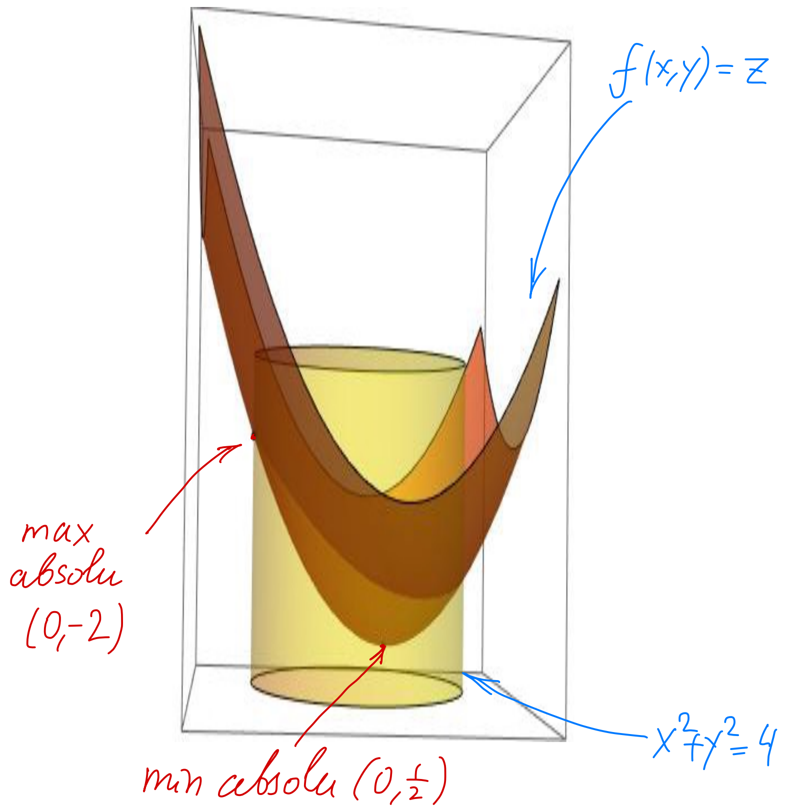
$\underline{\tilde{f}(2)} = 4-4+7 = 7 = \underline{f(0,2)}$

(3) $\underline{f(0,\tfrac{1}{2}) = \tfrac{5}{2}}$ $\Rightarrow$ min global (absolu) de f sur D en $(0,\tfrac{1}{2})$

$f(\pm\sqrt{3}, 1) = 6$

$\underline{f(0,-2) = 15}$ $\Rightarrow$ max global (absolu) de f sur D en $(0,-2)$

$f(0,2) = 7$



§4.9. Théorème des fonctions implicites.

Fonction implicite : une dependence $f = f(\bar{x})$ qui est définie par une équation.

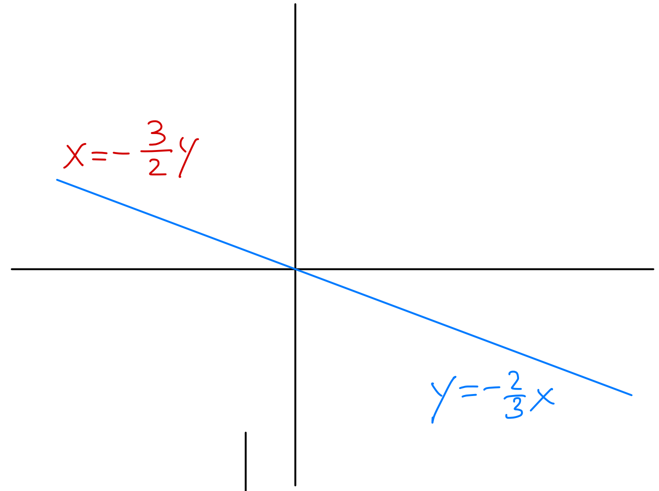
__Question :__ Est-ce que l'équation $F(x,y)=0$ définie une fonction $y=y(x)$?

__Ex 1.__ $F(x,y) = 2x+3y = 0$ définit une fonction $y=f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$y=f(x) \Rightarrow 2x+3f(x)=0 \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a aussi $x=g(y) \Rightarrow 2g(y)+3y=0$

$$\Rightarrow g(y) = -\frac{3}{2}y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$



__Ex 2.__ $F(x,y) = x^2+y^2-1 = 0$

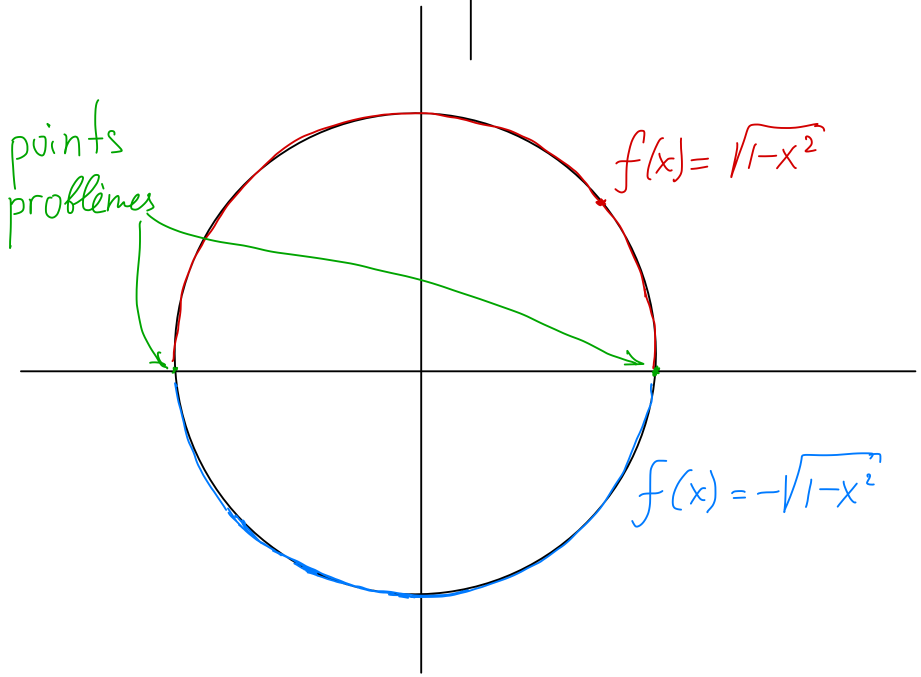
Soit $(a,b) \in$ cercle : $a^2+b^2=1$.

Si $b>0 \Rightarrow y=\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de (a,b), $b>0$

Si $b<0 \Rightarrow y=-\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de (a,b), $b<0$

Si $b=0 \Rightarrow$ deux points problèmes : deux solutions pour chaque x dans tout voisinage de $(\pm 1, 0)$

$\Rightarrow$ on ne peut pas avoir une fonction $y=f(x)$ au voisinage de $b=0$.



Ex 3. $F(x,y) = 1 - y e^x + x e^y = 0 \Rightarrow y = f(x)$ autour d'un point donné $(0,1)$?

Parfois on ne peut pas résoudre l'équation d'une manière explicite, mais la fonction est bien définie autour d'un point donné.

On peut considérer $F(x,y)$ comme une fonction de 2 variables de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui définit une surface $z = F(x,y)$.

On considère l'intersection de cette surface avec le plan $z = 0$.

La courbe obtenue s'appelle la ligne de niveau de $F(x,y)$ à $z = 0$.

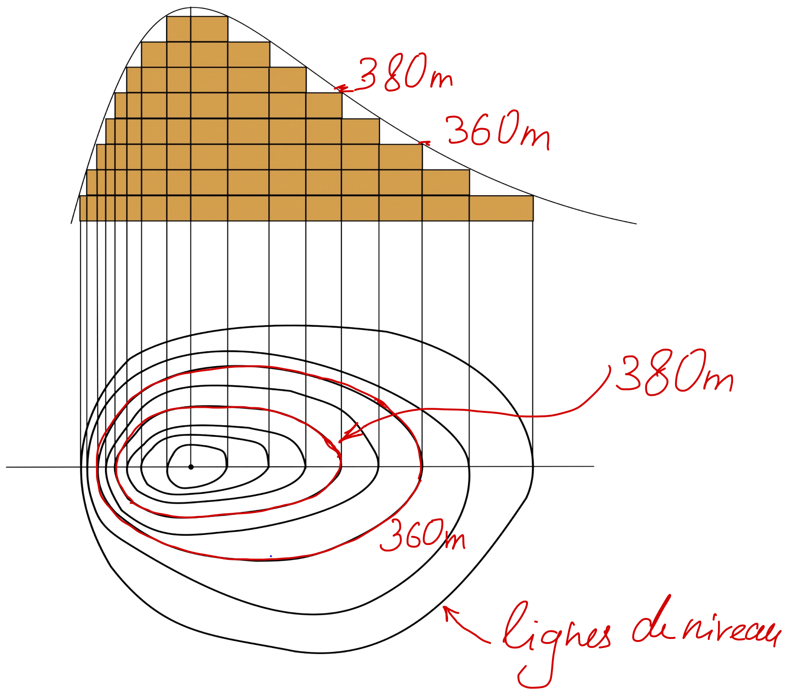
Déf. Une surface (ligne) de niveau d'une fonction $F(x,y,z)$ $(F(x,y))$ est la surface (ligne) définie par l'équation $F(x,y,z) = C$

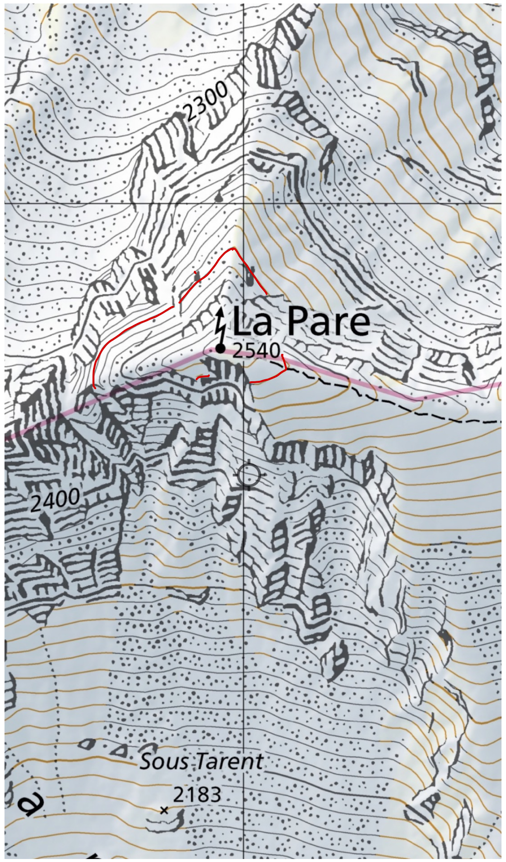
$(F(x,y) = C \in \mathbb{R})$

le niveau

Ex 1. Cartes géographiques

Courbes d'altitude en cartographie sont des ensembles des points situés en même altitude





Test Blanc : Lundi 9 mai en classe.