

Rappel: Formule de Taylor d'ordre 2 pour 2 variables: $f: E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}$ de classe C^3 sur E . -168-
 $(a, b) \in E$. Alors

$$f(x, y) = \underbrace{f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y-b) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b)(x-a)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)(y-b)^2 \right)}_{P_2 f_{(a,b)} - \text{polynôme de Taylor de } f \text{ d'ordre 2 autour de } (a, b)} + \underbrace{\varepsilon(\|(x, y) - (a, b)\|^2)}_{\text{le reste}}$$

Ex $f(x, y) = e^{-x+2y^2+1}$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ .
 Prouver le polynôme de Taylor de f d'ordre 2 autour de $(0, 1) = (a, b)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -e^{-x+2y^2+1} \Big|_{(0,1)} = -e^3; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4ye^{-x+2y^2+1} \Big|_{(0,1)} = 4e^3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-x+2y^2+1} \Big|_{(0,1)} = e^3;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-x+2y^2+1} + (4y)(4y)e^{-x+2y^2+1} \Big|_{(0,1)} = 20e^3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4ye^{-x+2y^2+1} \Big|_{(0,1)} = -4e^3.$$

$$\begin{aligned} P_2 f_{(0,1)} &= e^3 + (-e^3)x + 4e^3(y-1) + \frac{1}{2} (e^3 x^2 + 2(-4e^3)x(y-1) + 20e^3(y-1)^2) = \\ &= \underline{e^3 \left(1 - x + 4(y-1) + \frac{1}{2} x^2 - 4x(y-1) + 10(y-1)^2 \right)}. \end{aligned}$$

Il existe une autre méthode à calculer le polynôme de Taylor en utilisant les DL des fonctions d'une seule variable.

$$f(x, y) = e^{-x+2y^2+1} = e^{-x+2((y-1)+1)^2+1} = e^{-x+2(y-1)^2+4(y-1)+2+1} = e^3 e^{\underbrace{-x+4(y-1)+2(y-1)^2}_{s \text{ petit}}} = -169-$$

$$= e^3 \left(1 + s + \frac{1}{2} s^2 + \dots \right) = e^3 \left[1 + (-x + 4(y-1) + 2(y-1)^2) + \frac{1}{2} (x^2 + 16(y-1)^2 - 8x(y-1)) \right] =$$

DL pour e^s autour de $s=0$ d'ordre 2

(les autres termes sont d'ordre ≥ 3)

$$= e^3 \left(1 - x + 4(y-1) + \frac{1}{2} x^2 + 10(y-1)^2 - 4x(y-1) \right) = P_2 f_{(0,1)} \text{ le même qu'avant.}$$

Cas $n=3$. $f(x, y, z)$ autour de $(a, b, c) \in E \subset \mathbb{R}^3$, fonction de classe C^3

$$g(t) = \begin{pmatrix} a+t(x-a) \\ b+t(y-b) \\ c+t(z-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}; \quad F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial g_3}{\partial t}; \quad F = f \circ g$$

$$\Rightarrow F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(z-c) \quad \dots \quad F''(0).$$

Exercice: écrire le polynôme de Taylor de $f(x, y, z)$ d'ordre 2 autour de (a, b, c)

$$f(x, y, z) = \underbrace{f(a, b, c) + \langle \nabla f(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle}_{\text{...}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b, c)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b, c)(y-b)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a, b, c)(z-c)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(y-b)(z-c) + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x-a)(z-c) \right) +$$

$$P_2 f(a, b, c).$$

$$+ \mathcal{E}(\|(x, y, z) - (a, b, c)\|^2)$$

2 Méthodes. (1) La formule de Taylor en plusieurs variables.

(2) Utiliser les développements limités connus d'Analyse 1.

Ex. $f(x,y) = \frac{\sin(x + \frac{1}{y})}{1+x}$ autour de $(0,1)$ d'ordre 2.

Méthode 1. directe mais fastidieuse : $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1); \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,1); \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1).$

Méthode 2. nécessite un traitement soigneux et la maîtrise de DL.

$$f(x,y) = \frac{\sin(x + \frac{1}{y})}{1+x} \text{ autour de } (0,1).$$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{(y-1)+1} = \underbrace{1 - (y-1) + (y-1)^2 - \dots}_{\text{DL d'ordre 2 en } (y-1)} \quad ; \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad \text{DL d'ordre 2 en } x.$$

$$\begin{aligned} \sin\left(x + 1 - (y-1) + (y-1)^2 - \dots\right) &= \sin\left(1 + \underbrace{x - (y-1) + (y-1)^2}_{s \text{ petit}} - \dots\right) \stackrel{\text{formule trig}}{=} \sin 1 \underbrace{\cos s}_{\text{DL}} + \cos 1 \underbrace{\sin s}_{\text{DL}} = \\ &= \sin 1 \left(1 - \frac{s^2}{2} \dots\right) + \cos 1 \cdot (s) \leftarrow \text{DL d'ordre 2 en } s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 f(0,1) &= (1-x+x^2) \left[\sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} (x - (y-1) + (y-1)^2)^2\right) + \cos 1 (x - (y-1) + (y-1)^2) \right] \text{ où on ne retient que des termes d'ordre } \leq 2 \\ &= (1-x+x^2) \left[\sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} (y-1)^2 + x(y-1)\right) + \cos 1 (x - (y-1) + (y-1)^2) \right] = \end{aligned}$$

$$= \sin 1 \left(1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} (y-1)^2 + x(y-1) - x + x^2\right) + \cos 1 (x - (y-1) + (y-1)^2 - x^2 + x(y-1)) =$$

$$= \sin 1 + \underline{x} (\cos 1 - \sin 1) - \underline{(y-1)} \cos 1 + \underline{x^2} \left(\frac{1}{2} \sin 1 - \cos 1\right) + \underline{(y-1)^2} \left(\cos 1 - \frac{1}{2} \sin 1\right) + \underline{x(y-1)} (\sin 1 + \cos 1).$$

§4.8. Extrema d'une fonction de plusieurs variables.

-171-

Déf Soit $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$\bar{a} \in E$ est un **point stationnaire** de $f \stackrel{\text{dét}}{\iff} \nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right) = \bar{0}$.

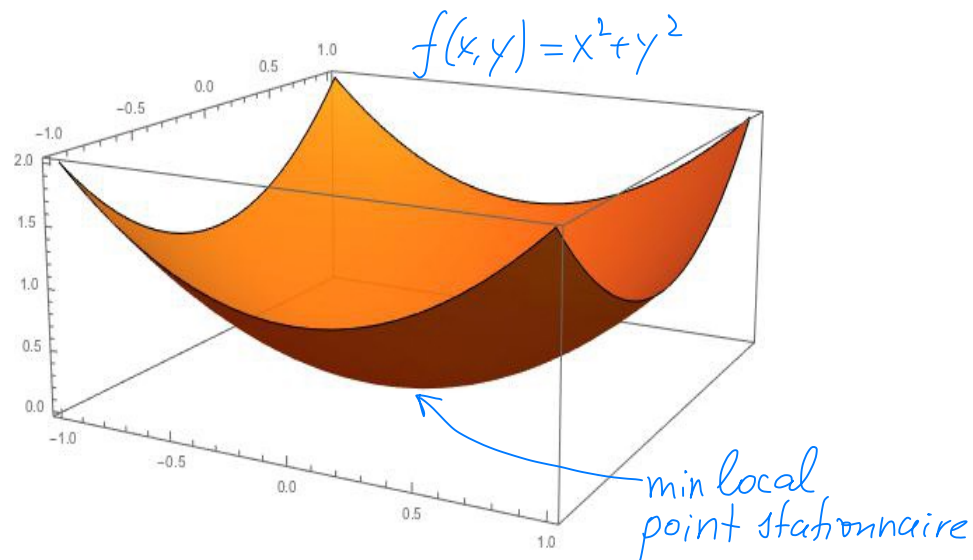
Déf $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ admet un max (min) local au point $\bar{a} \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que

max: $f(\bar{x}) \leq f(\bar{a})$
min: $f(\bar{x}) \geq f(\bar{a})$ pour tout $\bar{x} \in E \cap B(\bar{a}, \delta)$.

Ex 1. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y) \Big|_{(0,0)} = \bar{0}$$

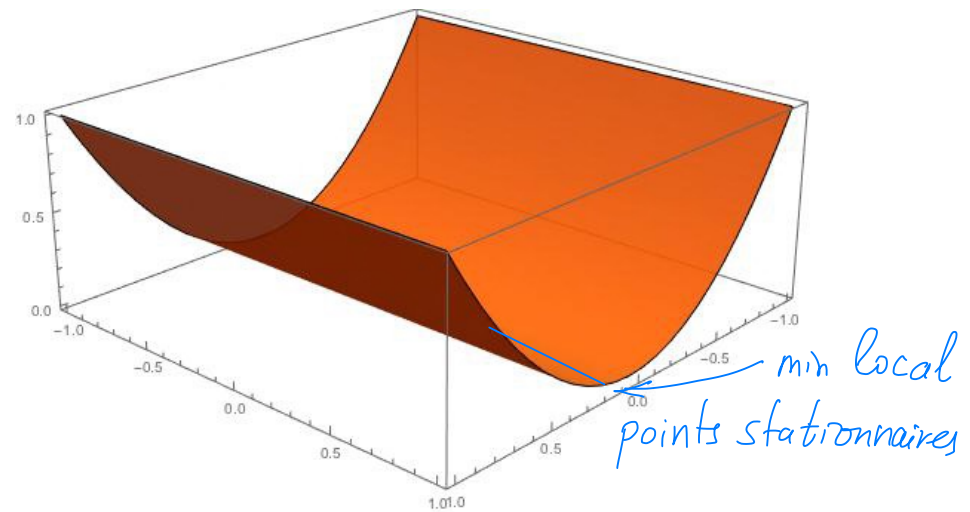
point stationnaire



Ex 2. $f(x, y) = x^2$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 0) \Big|_{(0, b)} = \bar{0} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

points stationnaires



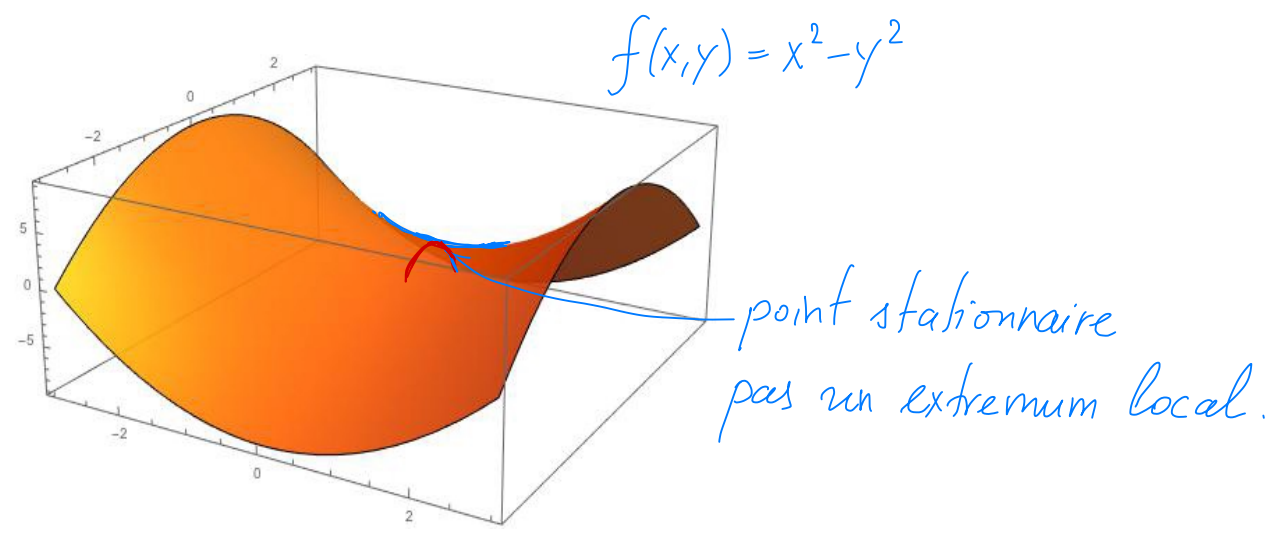
Proposition. (Condition nécessaire pour un extremum local).

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\bar{a} \in E$,
et telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ existent $\forall i=1 \dots n$. Alors $\bar{a}$ est un point stationnaire de $f (\Leftrightarrow \nabla f(\bar{a}) = \bar{0})$

Dém: Soit $g_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Alors $\nabla f(\bar{a})$ existe $\Rightarrow g_i(x)$ est dérivable
en $a_i = x$ et admet un extremum local en ce point $\Rightarrow$ [Analyse I] $\Rightarrow g'_i(a_i) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$.
Le même pour chaque $i=1 \dots n \Rightarrow \nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$. ▣

Remarque. (1) La réciproque est fausse : $\nabla f(\bar{a}) = \bar{0} \not\Rightarrow f$ admet un extremum local en $\bar{x} = \bar{a}$.

Ex 3. $f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, -2y) \Big|_{(0,0)} = \bar{0} \Rightarrow (0,0)$ est un point stationnaire



(2) Même si $f(\bar{x})$ admet un min(max) local le long de toute droite passant par $\bar{a}$, cela n'implique pas que $f(\bar{x})$ admet un min(max) local en $\bar{a}$.
 (Voir Exemple 13.4.3 dans [DZ]). $f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$ autour de $(0,0)$. -173-

Déf. $\bar{a} \in E$ est un **point critique** de $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ si :

- ou bien $\bar{a}$ est un point stationnaire
- ou bien au moins une des dérivées partielles n'existe pas en $\bar{x} = \bar{a}$.

Si $\bar{a} \in E$ est un point de min(max) local $\Rightarrow \bar{a}$ est un point critique.

Thm. (Condition suffisante pour un extremum local de $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ en $\bar{a} \in E$).

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 sur E , $\bar{a} \in E$ un point stationnaire: $\nabla f(\bar{a}) = \vec{0}$.

et soit
$$\text{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}(\bar{a})$$

- Alors:
- Si toutes les valeurs propres de $\text{Hess}_f(\bar{a})$ sont $\lambda_i > 0 \forall i$ positives $\Rightarrow$ min loc en $\bar{a}$
 - Si toutes les valeurs propres de $\text{Hess}_f(\bar{a})$ sont $\lambda_i < 0 \forall i$ négatives $\Rightarrow$ max loc en $\bar{a}$
 - Si il y a des valeurs propres $\lambda_i < 0$ négative et $\lambda_j > 0$ positives $\Rightarrow \bar{a}$ n'est pas un point d'extremum local.

Remarques. 1 $\text{Hess}_f(\bar{a}) = (\text{Hess}_f(\bar{a}))^T$ (puisque $f \in C^2(E) \Rightarrow$ Thm de Schwartz)

$\Rightarrow \text{Hess}_f(\bar{a})$ est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale O .

$$\text{Hess}_f(\bar{a}) = O D O^T \text{ où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

$$O^{-1} = O^T$$

Donc il existe un changement de variables linéaire orthogonale $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, \dots, y_n)$ tel que la matrice Hessienne devient diagonale, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres.

$$D = \text{Hess}_{f(y_1, \dots, y_n)}(\bar{a}).$$

Alors par la formule de Taylor on peut écrire (supposons que f est de classe C^3). -175-

$$f(\bar{y}) - f(\bar{a}) = \frac{1}{2} (\lambda_1 (x_1 - a_1)^2 + \lambda_2 (y_2 - a_2)^2 + \dots + \lambda_n (y_n - a_n)^2) + \mathcal{E}(\|\bar{y} - \bar{a}\|^2)$$

$\Rightarrow$ si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0 \Rightarrow f(\bar{y}) - f(\bar{a}) \geq 0$ pour tout $\bar{y}$ dans un voisinage de $\bar{a}$
 $\Rightarrow \bar{a}$ est un point de min loc de f

$\Rightarrow$ si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0 \Rightarrow f(\bar{y}) - f(\bar{a}) \leq 0 \Rightarrow \bar{a}$ est un point de max loc de f .

$\Rightarrow$ si $\exists i, j$ tels que $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \Rightarrow \bar{a}$ n'est pas un extremum local.

2 Cas $n=2$. Les conditions du Théorème sur la matrice $\text{Hess}_f(\bar{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes:

$$\text{Soit } \text{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{notation}$$

(a) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r > 0$.

(b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r < 0$.

(c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$
ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) < 0$.

..... démonstration la prochaine fois.