Méthodes de démonstration

Récurrence sur deux variables

Soit $P(n,m)$ une proposition, $n,m \geq 0$.

$\boxed{1}$ Méthode carré

(1) $P(0,0)$ est vraie

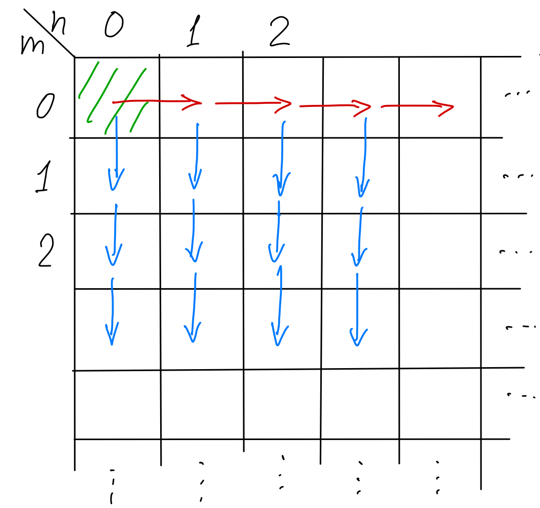
(2) $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0) \ \forall n \geq 0$

$(\forall m,n \ \ P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m))$

(3) $\forall m,n \ \ P(n,m) \Rightarrow P(n,m+1)$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Alors $P(n,m)$ est vraie $\forall n,m \in \mathbb{N}$.



$\boxed{2}$ Méthode diagonale

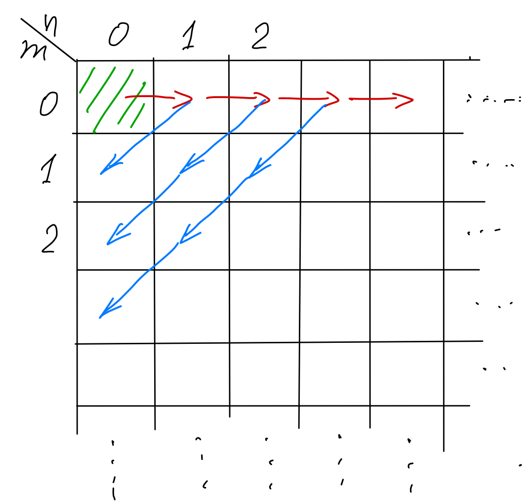
(1) $P(0,0)$ est vraie

(2) $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0) \ \forall n \geq 0$

(3) $\forall m,n \ \ P(n+1,m) \Rightarrow P(n,m+1)$

$\Rightarrow$

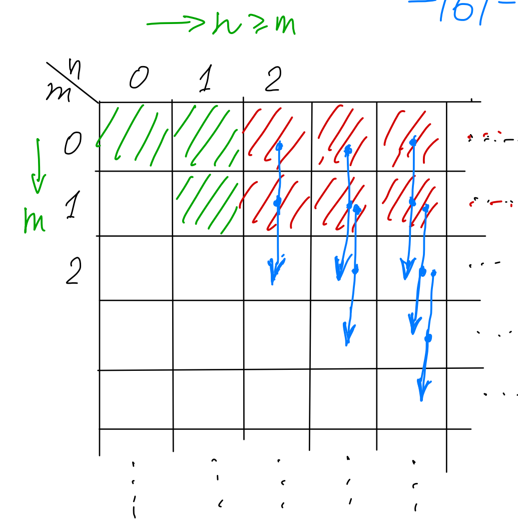
$\Rightarrow$ Alors $P(n,m)$ est vraie $\forall n,m \in \mathbb{N}$.



(3) $P(1,0) \Rightarrow P(0,1)$

$P(2,0) \Rightarrow P(1,1) \Rightarrow P(0,2)$

Exemple. Nombres de Fibonacci : $f_0=0,\ f_1=1,\ f_{n+2} \overset{Fib}{=} f_n+f_{n+1}\ \ \forall n\in\mathbb{N}$



Proposition. $\underbrace{f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m}}_{P_{n,m}}\quad \forall n,m\ :\ n\geq m\geq 0$

Dém: *Base:* $P(0,0)$: $f_0f_1 - f_0f_1 = (-1)^0 f_0 \Rightarrow 0-0=0$ vraie

$P(1,0)$: $f_1f_1 - f_0f_2 = (-1)^0 f_1 \Rightarrow 1-0=1$ vraie

$n\geq m \Rightarrow$ ~~$P(0,1)$~~ $P(1,1)$: $f_1f_2 - f_1f_2 = (-1)^1 f_0 \Rightarrow 1-1=0$ vraie.

Hérédité $P(n,0)$: $f_nf_1 - f_0\cdot f_{n+1} = (-1)^0 f_n \Rightarrow f_n - 0 = f_n$ vraie $\forall n\geq 0$ (sans récurrence).

$P(n,1)$: $f_nf_2 - f_1f_{n+1} = (-1)^1 f_{n-1} \Rightarrow f_n - f_{n+1} = -f_{n-1} \Leftrightarrow f_{n-1}+f_n \overset{Fib}{=} f_{n+1}$ vraie $\forall n\geq 1$.

Soit n fixé : démontrons que $P(n,m)$ et $P(n,m+1) \Rightarrow P(n,m+2)$ $\quad\forall m\leq n-2$

$P(n,m)$: $f_nf_{m+1} - f_mf_{n+1} = (-1)^m f_{n-m}$; $\quad P(n,m+1)$: $f_nf_{m+2} - f_{m+1}f_{n+1} = (-1)^{m+1} f_{n-m-1}$

$P(n,m+2)$: $f_nf_{m+3} - f_{m+2}f_{n+1} = f_n\left(f_{m+1} \overset{Fib}{+} f_{m+2}\right) - \left(f_m \overset{Fib}{+} f_{m+1}\right)f_{n+1} =$

$$=\underbrace{\left(f_nf_{m+1} - f_mf_{n+1}\right)}_{P_{n,m}:\ (-1)^m f_{n-m}} + \underbrace{\left(f_nf_{m+2} - f_{m+1}f_{n+1}\right)}_{P_{n,m+1}:\ (-1)^{m+1} f_{n-m-1}} = (-1)^m\underbrace{\left(f_{n-m} - f_{n-m-1}\right)}_{Fib\ =\ f_{n-m-2}} = (-1)^{m+2} f_{n-m-2}$$

$\Rightarrow P(n,m+2)$: $f_nf_{m+3} - f_{m+2}f_{n+1} = (-1)^{m+2} f_{n-m-2}$.

Conclusion: $P(n,0)$ vraie $\forall n\geq 0$, $P(n,1)$ vraie $\forall n\geq 1$, et pour tout $n\geq 0$ fixé, $P(n,m)$ et $P(n,m+1)$ impliquent $P(n,m+2)$ $\forall m\leq n-2$. Alors par récurrence $P(n,m)$ est vraie $\forall n\geq m\geq 0$. $\blacksquare$

Rappel: $\bar{f} : E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}^m$ dérivable sur E

$\Rightarrow$ Matrice Jacobienne: $J_{\bar{f}}(\bar{x}) = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_m} & \cdots & & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}^{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}\right\} m$

$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$

Fonctions composée: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^q$; Si $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in \mathbb{R}^p$,

Alors on considère $\bar{f} \circ \bar{g}$

$\Rightarrow$ $\bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ et

$$\boxed{J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})}$$

matrices de Jacobi

produit matriciel

Application: Le gradient et le Laplacien en coordonnées polaires.

Déf. Soit $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E. La fonction $\Delta f : E \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\Delta f(x_1, \dots x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}}$$

est le Laplacien de f.

Ex 1. $f(x,y) = xy + 3x^3$. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 0 = 18x.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 9x^2 \;;\; \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

Proposition. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $\tilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$ changement de variables polaires

Alors $\nabla f(x,y) = \left(\cos\varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi},\ \sin\varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right)$ - le gradient

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$$ - le Laplacien.

Dém: $\tilde{f}(r,\varphi) = f \circ g(r,\varphi)$; $g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_g(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow J_{\underbrace{f\circ g}_{\tilde{f}}(r,\varphi)} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) = J_f(x,y) \cdot J_g(r,\varphi) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)} \cdot J_g(r,\varphi)$$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) \cdot \left(J_g(r,\varphi)\right)^{-1} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\right) \cdot \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi & r\sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\left(\underbrace{\cos\varphi \frac{\partial \tilde f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin\varphi \frac{\partial \tilde f}{\partial\varphi}}, \ \sin\varphi\frac{\partial\tilde f}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial\tilde f}{\partial\varphi}\right) = \nabla f(x,y).}$$

Pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$: $\frac{\partial f}{\partial x}$: $\cos\varphi \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ en coord. polaires}\right) - \frac{1}{r}\sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ en coord. polaires}\right)$

(Voir Série 9) ▨

Ex 2. $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ $(x,y) \neq (0,0)$ $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = ?$

$f(x,y) \rightsquigarrow \tilde f(r,\varphi) = \frac{r\sin\varphi}{r^2} = \frac{\sin\varphi}{r}$ la même fonction en coordonnées polaires.

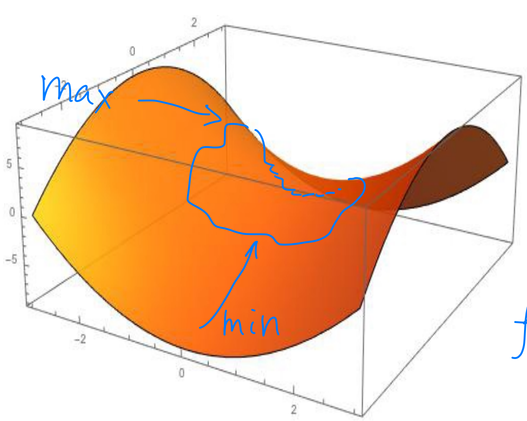
Proposition $\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial^2 \tilde f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \tilde f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tilde f}{\partial r} = \frac{2\sin\varphi}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{-\sin\varphi}{r} + \frac{1}{r}\left(-\frac{\sin\varphi}{r^2}\right) = 0.$

$\frac{\partial \tilde f}{\partial r} = -\frac{\sin\varphi}{r^2}$; $\frac{\partial \tilde f}{\partial \varphi} = \frac{\cos\varphi}{r}$ $\Rightarrow \Delta f = 0$ sur son domaine

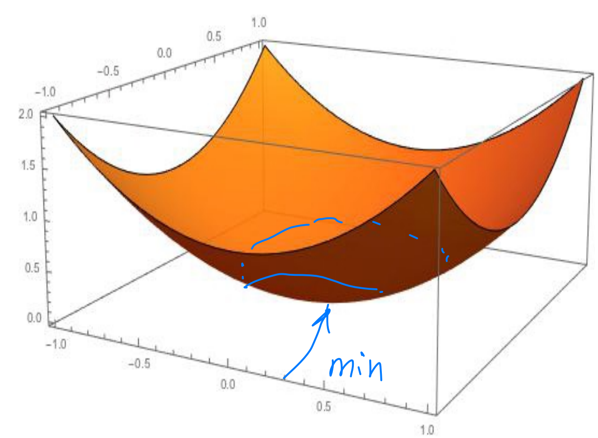
Déf. Une fonction telle que $\Delta f = 0$ sur $E \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle harmonique.

Ex 3. $f(x,y) = x^2 - y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $g(x,y) = x^2 + y^2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\Delta f(x,y) = 2 - 2 = 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^2$ $\Delta f(x,y) = 2 + 2 = 4 \neq 0 \ \forall x,y \in \mathbb{R}^2$



$f(x,y)$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$



$g(x,y)$ n'est pas harmonique.

Une fonction harmonique sur un domaine compact atteint son min et son max sur la frontière du domaine. (Sans démonstration)

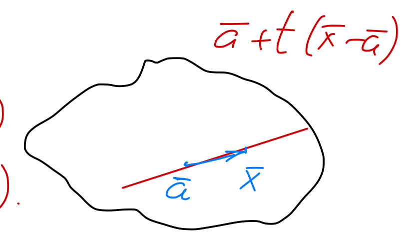
§4.7 Formule de Taylor.

Thm. Soit $f : E \overset{\subset \mathbb{R}^n}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ de classe C^{p+1} au voisinage de $\bar{a} \in E$.
Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(\bar{a}, \delta) \cap E$ il existe $0 < \theta < 1$ tel que

$$f(\bar{x}) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2} F''(0) + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta).$$

où $F : \underset{\supset [0,1]}{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad F(t) = f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a}))$

$F(0) = f(\bar{a})$
$F(1) = f(\bar{x})$.



Dém: $f(\bar{x}) = F(1)$, $f(\bar{a}) = F(0)$; $F(t)$ de classe C^{p+1} sur I

Analyse I $\Rightarrow$ la formule de Taylor pour $F(t)$, fonction d'une seule variable

$$\Rightarrow F(t) = F(0) + F'(0) \cdot t + \tfrac{1}{2} F''(0) \cdot t^2 + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) t^p + \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta) t^{p+1}, \quad \theta \text{ entre } 0 \text{ et } t.$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}) = F(1) = F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2} F''(0) + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1$$

$\blacksquare$

Remarque: $F'(0) = \lim_{t \to 0} \dfrac{f(\bar{a} + t(\bar{x} - \bar{a})) - f(\bar{a})}{t} = Df(\bar{a}, (\bar{x} - \bar{a}))$.

$$\boxed{f(\bar{x}) = \underbrace{F(0) + F'(0) + \tfrac{1}{2} F''(0) + \dots + \frac{1}{p!} F^{(p)}(0)}_{\text{le polynôme de Taylor de } f \text{ d'ordre } p \text{ au point } \bar{a}.} + \text{le reste}}$$

En particulier, Cas $n=2$. $\bar{a}=(a,b)$; $\bar{x}=(x,y)$, f de classe C^{p+1}, $p\geq 2$.

$f(x,y): E\to\mathbb{R}$, on cherche le polynôme de Taylor d'ordre p autour de (a,b).

$F(t)=f(a+t(x-a),\, b+t(y-b))$. Trouver $F'(t)$, $F''(t)$ en termes de f.

$F(t)=f\circ g(t)$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $g(t)=(a+t(x-a),\, b+t(y-b))$.

$$\Rightarrow F'(t)=J_F(t)=J_f(g(t))\cdot J_g(t)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t}\\ \frac{\partial g_2}{\partial t}\end{pmatrix}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot(x-b)$$

$g_1(t)=a+t(x-a)$, $g_2(t)=b+t(y-b)$.

$$\Rightarrow \underline{F'(0)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)}.$$

$F''(0)$? $\quad F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial t}$

Calcul: $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}\right)}_{=0}=$

$$=\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,\frac{\partial g_1}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}}$$

$$F''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)^2 =$$

Thm de Schwartz, f est de classe C^p, $p\geq 3$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-a)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x-a)(y-b)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2$$

$\frac{\partial g_1}{\partial t}=x-a$

$\frac{\partial g_2}{\partial t}=y-b$

$\frac{\partial^2 g_1}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2}=0$

$$\boxed{F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\cdot(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2}$$

D'une façon similaire, on obtient:

$$F^{(3)}(0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\cdot(x-a)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\cdot(x-a)^2(y-b) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\cdot(x-a)(y-b)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\cdot(y-b)^3$$

1 3 3 1

Les coefficients binomiaux $C_p^k = \frac{p!}{k!\,(p-k)!}$.

$$\Rightarrow F^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}}\, C_p^k\, (x-a)^k (y-b)^{p-k}.$$

Souvent on utilise l'approximation de Taylor d'ordre 2:

$$f(x,y) = \underbrace{f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\cdot(y-b)^2\right)}_{P_2 f_{(a,b)}}$$

$$+\ \underline{\varepsilon\left(\|(x,y)-(a,b)\|^2\right)}$$

le reste

$P_2 f_{(a,b)}$ - polynôme de Taylor de f d'ordre 2 autour de (a,b).