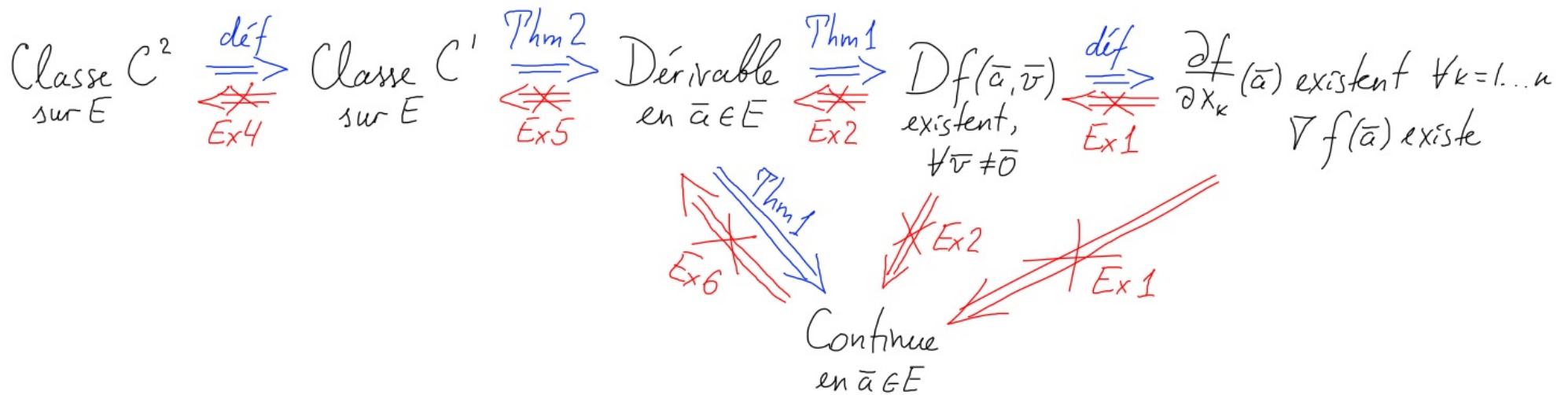


Rappel: Propriétés des fonctions de plusieurs variables.

Soit $f: \underset{\text{ouvert}}{E} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$.



A comparer avec Analyse 1: $f(x), x \in E \subset \mathbb{R}$

Classe $C^2 \xRightarrow[\text{Ex}]{=} \text{Classe } C^1 \xRightarrow[\text{Ex}]{=} \text{Dérivabilité en } a \in E \Leftrightarrow f'(x) \text{ existe en } x=a$
 $\Downarrow \text{Ex}$
 Continu en $x=a$

§4.4. Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$.

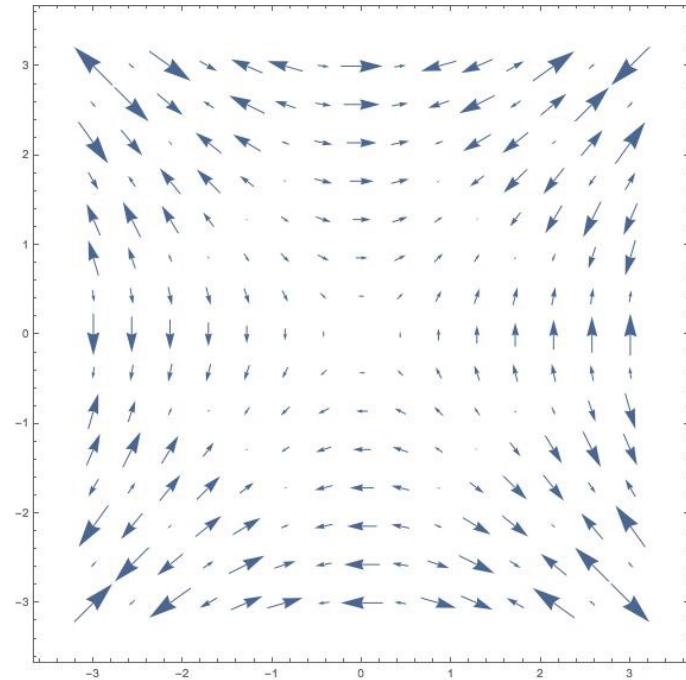
Exemple. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que le gradient $\nabla f(\bar{x})$ existe $\forall \bar{x} \in E$.

Alors $(\nabla f)^T: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Ex 1 $f(x, y) = \sin(xy)$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (y \cos(xy), x \cos(xy))$$

$$(\nabla f)^T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ champs vectoriel}$$



$$(\nabla f(x, y))^T$$

Plus généralement, on peut considérer les fonctions $\bar{f}: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

← m composantes

Chaque composante f_i est une fonction réelle de n variables réelles.

Déf La k -ième dérivée partielle de $\bar{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\bar{a} \in E$
 est $\underbrace{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k}(\bar{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\bar{a}) \end{pmatrix}$ si chacune des fonctions $f_1, \dots, f_m$ admet
 la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en $\bar{a}$.

Déf Soit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ $\bar{v} \neq 0$. La dérivée directionnelle de $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivant $\bar{v}$ en $\bar{a} \in E$
 est $\underbrace{D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ Df_2(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix}$ si $Df_i(\bar{a}, \bar{v})$ existent pour tout $i=1, \dots, m$

Déf $\bar{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet $\bar{l} \in \mathbb{R}^m$ pour limite lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 tel que $0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{l}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$
 $\bar{x} \in E$

En particulier $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_1(\bar{x}) \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$

$\underbrace{\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{l}\|_{\mathbb{R}^m}}_{\text{petit}} = \underbrace{(f_1(\bar{x}) - l_1)^2}_{\text{petits}} + \dots + \underbrace{(f_m(\bar{x}) - l_m)^2}_{\text{petits}}$
 $\Leftrightarrow$

-145-

Déf $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable au point $\bar{a} \in E$ s'il existe une transformation linéaire $\bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une fonction $\bar{r} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que

$$\bar{f}(\bar{x}) = \underbrace{\bar{f}(\bar{a}) + \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a})}_{\in \mathbb{R}^m} + \bar{r}(\bar{x}) \quad , \quad \text{et} \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{\bar{r}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0.$$

Alors $\bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée **la différentielle** de $\bar{f}$ en $\bar{a}$.

Proposition $\bar{f} = (f_1 \dots f_m) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\bar{a} \in E$ **si et seulement si** chaque composante $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $\bar{a} \in E \quad \forall i = 1 \dots m$.

$$\bar{L}_{\bar{a}}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{v}) \\ L_{2,\bar{a}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{v}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{où } \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0} ; \quad L_{i,\bar{a}}(\bar{v}) \text{ est la différentielle de } f_i \text{ calculée en } \bar{a} \text{ appliquée à } \bar{v}.$$

Ainsi on a : $L_{i,\bar{a}}(\bar{v}) = Df_i(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f_i(\bar{a}), \bar{v} \rangle$.

La matrice Jacobienne.

Déf Si $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ possède toutes les dérivées partielles en $\bar{a} \in E$, alors sa **matrice Jacobienne** (matrice de Jacobi) est définie comme suit :

$$\underbrace{J_{\bar{f}}(\bar{a})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=}$$

(dans [DZ]: $J_{\bar{f}}(\bar{a}) = D_{\bar{f}}(\bar{a})$)
notation

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \nabla f_2(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

Annotations: A red box highlights the first row, with an arrow pointing to $\nabla f_1(\bar{a})$. A blue box highlights the first column, with an arrow pointing to $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a})$.

Remarques (1) Si $\bar{f}$ est d\'erivable en $\bar{a} \in E$, alors $J_{\bar{f}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_1) & L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_2) & \dots & L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_n) \\ L_{2,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \dots & \dots & L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_n) \end{pmatrix}$
(puisque $\nabla f_i(\bar{a}) = (L_{i,\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{i,\bar{a}}(\bar{e}_n)) \forall i$).
La matrice Jacobienne = la matrice de la diff\'erentielle de $\bar{f}$.
(si $\bar{f}$ est d\'erivable en $\bar{a}$).
(2) Si $\bar{f}$ est d\'erivable, alors $D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\bar{a}), \bar{v} \rangle \\ \langle \nabla f_2(\bar{a}), \bar{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\bar{a}), \bar{v} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \nabla f_m(\bar{a}) & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \left(J_{\bar{f}}(\bar{a}) \right) \cdot \bar{v}$$

Annotations: A red bracket groups the Jacobian matrix and the vector $\bar{v}$. A blue arrow points to the product with the text "action de la matrice Jacobienne sur le vecteur $\bar{v}$ ".

Déf. Lorsque $m=n$, on définit le déterminant de Jacobi (le Jacobien) de $\bar{f} = (f_1 \dots f_n)$ en $\bar{a}$:

$$|J_{\bar{f}}(\bar{a})| = \det J_{\bar{f}}(\bar{a}) \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \frac{D(f_1 \dots f_n)}{D(x_1 \dots x_n)}(\bar{a})$$

notations notation dans [DZ]

Ex 1. Soit $\bar{g}(x,y) = (\nabla f(x,y))^T$ où $f(x,y) = \sin(xy) \Rightarrow \bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} y \cos(xy) \\ x \cos(xy) \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
Alors la matrice Jacobienne de g en (x,y) est

$$J_{\bar{g}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy \sin(xy) \\ \cos(xy) - xy \sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \text{Hess}(f)(\bar{x})$$

(par déf.)

Remarque. D'après la définition on a pour toute fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur E

$$J_{(\nabla f)^T}(\bar{x}) = \text{Hess}(f)(\bar{x})$$

Exercice: Calculer le Jacobien dans Ex 1. $|J_{\bar{g}}(x,y)| = x^2 y^2 \sin^2(xy) - (\cos(xy) - xy \sin(xy))^2 = -148$
 $= x^2 y^2 \sin^2(xy) - \cos^2(xy) - x^2 y^2 \sin^2(xy) + 2xy \cos(xy) \sin(xy) = xy \sin(2xy) - \cos^2(xy)$.

§4.5. Application des matrices Jacobiennes : dérivée d'une fonction composée.

Thm. Soit $\bar{g} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\bar{g}(A) \subset B \subset \mathbb{R}^p$; $\bar{f} : B \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$
 $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^q$

Supposons que $\bar{a} \in A$, $\bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in B$; $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ avec la différentielle $L_{\bar{a}} \bar{g}$,
 et $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b}$ avec la différentielle $L_{\bar{b}} \bar{f}$.

Alors $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{f}(\bar{g}(\cdot))$ est dérivable en $\bar{a}$ et on a :

(1) $L_{\bar{a}}(\bar{f} \circ \bar{g}) = L_{\bar{b}} \bar{f} \circ L_{\bar{a}} \bar{g}$
 comp. des fonction comp. des transf. linéaires

(2) $J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})$
 matrice $q \times n$ matrice $q \times p$ matrice $p \times n$
 produit matriciel

(3) Si $n=p=q$

$|J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a})| = |J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a}))| \cdot |J_{\bar{g}}(\bar{a})|$

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\}}_p \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} J_{\bar{f}} \\ \text{ } \end{array} \right\}}_q \cdot \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} J_{\bar{g}} \\ \text{ } \end{array} \right\}}_p^P = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} J_{\bar{f} \circ \bar{g}} \\ \text{ } \end{array} \right\}}_n^q$$

Idee: $\bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{a}) + \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{g})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x})) = \left[\bar{f} \text{ est dérivable en } \bar{g}(\bar{a}) \right] =$
 $\bar{g} \text{ est dérivable en } \bar{a}$
 $= \bar{f}(\bar{g}(\bar{a})) + \bar{L}_{\bar{b}} \bar{f}(\bar{L}_{\bar{a}}(\bar{g})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x})) + \bar{r}_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{x})) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{a})) + \underbrace{\bar{L}_{\bar{b}} \bar{f}(\bar{L}_{\bar{a}} \bar{g}(\bar{x}-\bar{a}))}_{\substack{\text{Linéarité de } \bar{L}_{\bar{b}} \bar{f} \\ \bar{L}_{\bar{b}} \bar{f} \circ \bar{L}_{\bar{a}} \bar{g}(\bar{x}-\bar{a})}} +$
 $+ \underbrace{\bar{L}_{\bar{b}} \bar{f}(\bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x}))}_{\text{petit}} + \underbrace{\bar{r}_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{x}))}_{\text{petit lorsque } \|\bar{x}-\bar{a}\| \rightarrow 0}$

$\Rightarrow \bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ avec la différentielle $\bar{L}_{\bar{a}}(\bar{f} \circ \bar{g}) = \bar{L}_{\bar{b}} \bar{f} \circ \bar{L}_{\bar{a}} \bar{g}$ □

Ex. 2. $n=p=q=1$. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(y) = y^2$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$
 $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}; f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$

Soit $a \in \mathbb{R} \Rightarrow J_g(\bar{a}) = (\sin x)'|_{x=a} = \underline{\cos a}$ ← matrices 1x1

Soit $b \in \mathbb{R}; b = g(a) = \sin a \Rightarrow J_f(b) = (y^2)'|_{y=b=\sin a} = \underline{2 \sin a}$ ↖

$J_{f \circ g}(\bar{a}) = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) = 2 \sin a \cdot \cos a$
 $2 \sin a \cdot \cos a$

On retrouve la formule de la dérivée d'une fonction composée (Analyse I)

$f \circ g(x) = \sin^2 x \Rightarrow J_{f \circ g}(a) = (\sin^2 x)'|_{x=a} = \underline{2 \sin a \cos a}$

$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$

Ex 3. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(z) = z^2$; $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, g(x,y) = \sin(xy)$.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$J_g(x,y) = \nabla g(x,y) = \underline{(y \cos(xy), x \cos(xy))} \quad 2 \times 1$$

$$J_f(z) = (z^2)' = 2z \Rightarrow J_f(g(x,y)) = 2z \Big|_{z=\sin(xy)} = \underline{2 \sin(xy)}$$

$$f \circ g(x,y) = (\sin(xy))^2 \Rightarrow \underline{J_{f \circ g}(x,y) = \nabla(f \circ g)(x,y) = (2 \sin(xy) \cos(xy) \cdot y, 2 \sin(xy) \cos(xy) \cdot x)}$$

$$\underline{J_f(\sin(xy)) \cdot J_g(x,y)} = \underline{2 \sin(xy) \cdot (y \cos(xy), x \cos(xy))} //$$

Résumé (1) Si $\bar{h}: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow \bar{h}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ h_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\bar{h}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}} \right\}^m$

(2) Si $g: \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow J_g(\bar{x}) = \nabla g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$

(3) Si $\bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow J_{\bar{g}}(x) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g'_1(x) \\ \vdots \\ g'_m(x) \end{pmatrix}$

(4) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow J_f(x) = \nabla f(x) = f'(x)$ la dérivée de f .