Rappel: Dérivées partielles, dérivées directionnelles, fonctions dérivables

$f: E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ; $\bar{a} \in E$

$\boxed{1}$ Dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(\bar{a}+t\bar{e}_k)-f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe; $\bar{e}_k = (0, \dots \overset{k}{1}, \dots 0)$.

Le gradient $\nabla f(\bar{a}) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}) \dots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$.

$\boxed{2}$ Dérivées directionnelles : $Df(\bar{a},\bar{v}) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\bar{a}+t\bar{v})-f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe ; $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$

$Df(\bar{a},\bar{e}_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \Rightarrow$ si $Df(\bar{a},\bar{v})$ existent pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$ existent $\forall k = 1 \dots n$.

La reciproque est fausse en général.

$\boxed{3}$ f est dérivable en $\bar{a}$ $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists\, \underbrace{L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}}_{\text{transformation linéaire}}$ et $\underbrace{r : E \to \mathbb{R}}_{\text{fonction}}$

telles que $f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x}-\bar{a}) + r(\bar{x})$ pour tout $\bar{x} \in E$, et $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{a}} \dfrac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}-\bar{a}\|} = 0$.

Si f est dérivable en $\bar{a}$ $\underset{\text{de dérivabilité}}{\overset{\text{Thm 1}}{\Longrightarrow}}$ f est continue en $\bar{a}$; $Df(\bar{a},\bar{v})$ existe $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$ existent $\forall k = 1 \dots n$ $\Rightarrow \nabla f(\bar{a})$ existe,

et on a: $\boxed{L_{\bar{a}}(\bar{v}) = Df(\bar{a},\bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle}$; $L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) = \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$.

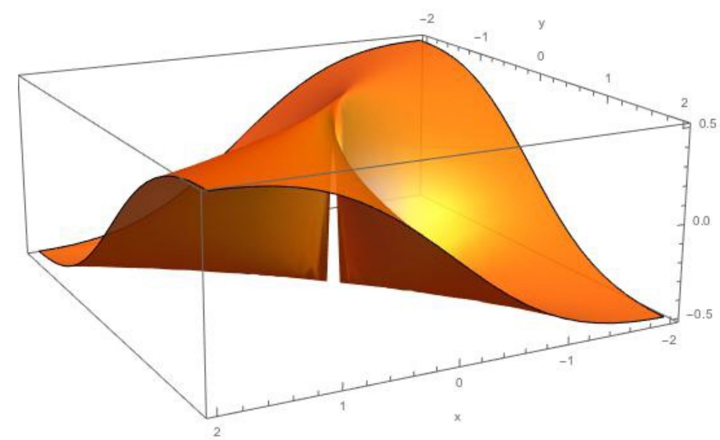
La reciproque est fausse en général: l'existence des dérivées directionnelles n'implique pas la dérivabilité de la fonction.

Thm 2 sur dérivabilité $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: E \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existent sur $B(\bar{a}, \delta)$ et sont continues en $\bar{a}$.

Alors f est dérivable en $\bar{a} \in E$.

Dém: Basée sur le Thm des accroissements finis pour chaque variable $x_1 \dots x_n$.

[Voir DZ, Annexe E4]



Ex 1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$\#$

$$\lim_{k\to\infty} f\left(0, \tfrac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}} = 0$$

Thm 1 $\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Les dérivées partielles en $(x,y) \neq (0,0) \Rightarrow f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2};$$

$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^4}}$ n'existe pas.

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = \frac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{f}{\partial y}\left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^4}}$ n'existe pas.

Les dérivée directionnelles ? en (0,0)

Soit $\bar{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$x = tv_1,\ y = tv_2$

$$Df(\bar{0}, \bar{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{0} + t\bar{v}) - f(\bar{0})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 0 \text{ ou } v_2 = 0 \\ \text{n'existe pas, autrement.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{v} = (1,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = Df(\bar{0}, (1,0)) = 0.$$

$$\bar{v} = (0,1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = Df(\bar{0}, (0,1)) = 0.$$

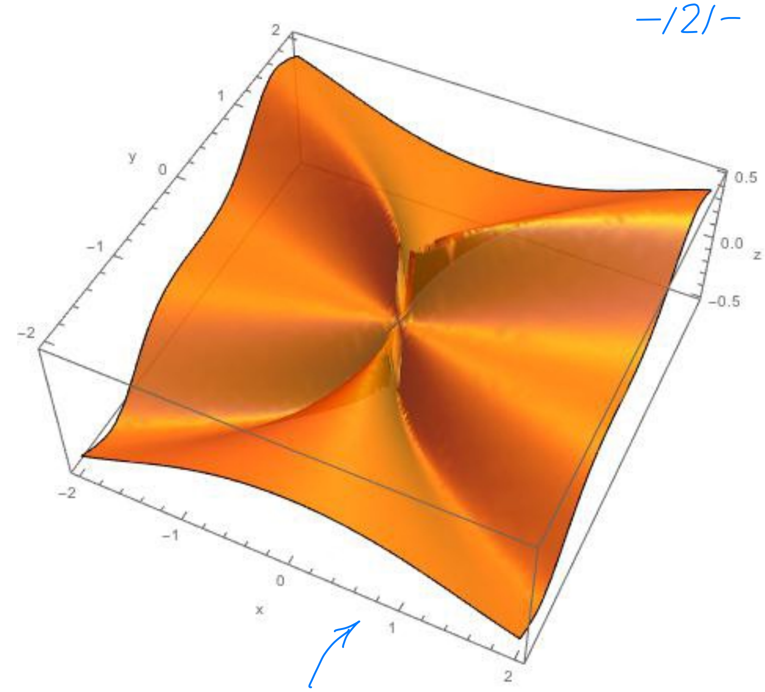
$\Rightarrow$ Les dérivées partielles existent en $(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0$.

Mais les dérivées directionnelles suivant $\bar{v} = (v_1, v_2)$: $v_1 \neq 0$ et $v_2 \neq 0$ n'existent pas en $(0,0)$.

La fonction n'est pas dérivable en $(0,0)$.

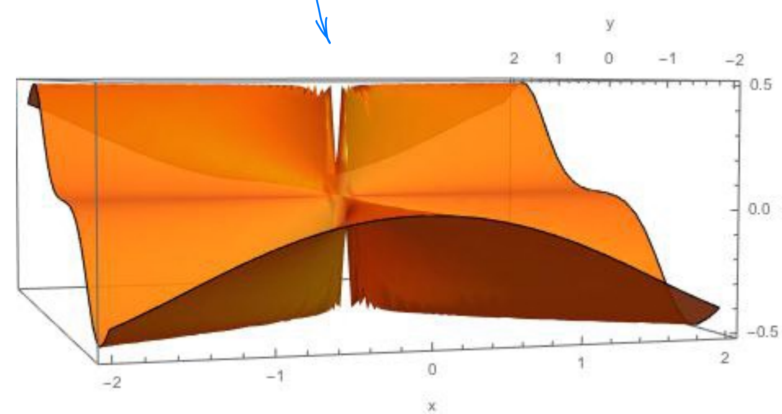
Ex 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$



$f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} f\left(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^5}}{\frac{1}{k^4}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \# \\ &\lim_{k\to\infty} f\left(\tfrac{1}{k^3},\tfrac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^6}\cdot\frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^{12}}+\frac{1}{k^{12}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable en } (0,0)$$



Dérivées directionnelles en $(0,0)$, $\bar{v}=(v_1,v_2)$

$$Df(\bar{0},\bar{v}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{0}+t\bar{v})-f(\bar{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5v_1^2v_2^3}{t(t^4v_1^4+t^6v_2^6)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^5}\, v_1^2v_2^3}{\cancel{t^5}(v_1^4+t^2v_2^6)} = \begin{cases} \dfrac{v_1^2v_2^3}{v_1^4} = \dfrac{v_2^3}{v_1^2} & \text{si } v_1\neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{0+t^2v_2^2} = 0 & \text{si } v_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les dérivées directionnelles existent en $(0,0)$ pour tout $\bar{v}\in\mathbb{R}^2$, $\bar{v}\neq(0,0)$

En particulier,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = Df(\bar{0},\overset{v_2=0}{(1,0)}) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = Df(\bar{0},\overset{v_1=0}{(0,1)}) = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Mais la fonction n'est pas dérivable en $(0,0)$!

Exercice: Vérifier que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$

§4.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur à 1.

Déf. Soit $f: E \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe pour un k, $1 \le k \le n$ en tout point de $\underset{\text{ouvert}}{E} \subset \mathbb{R}^n$. Alors

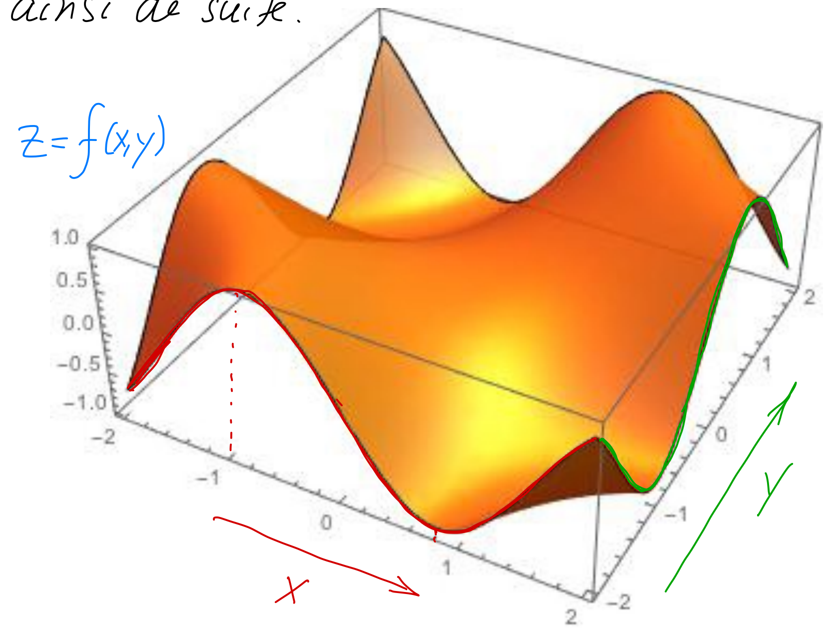
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}), \ \bar{x} \in E \text{ est la fonction } k\text{-ième dérivée partielle.}$$

Déf. Soit $f: E \to \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe en tout $\bar{x} \in E$. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à x_i,

on pose $$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$ - la notation de la dérivée partielle seconde

Remarque. L'ordre des dérivées partielles est inversé dans DZ [DZ, §13.2.1]

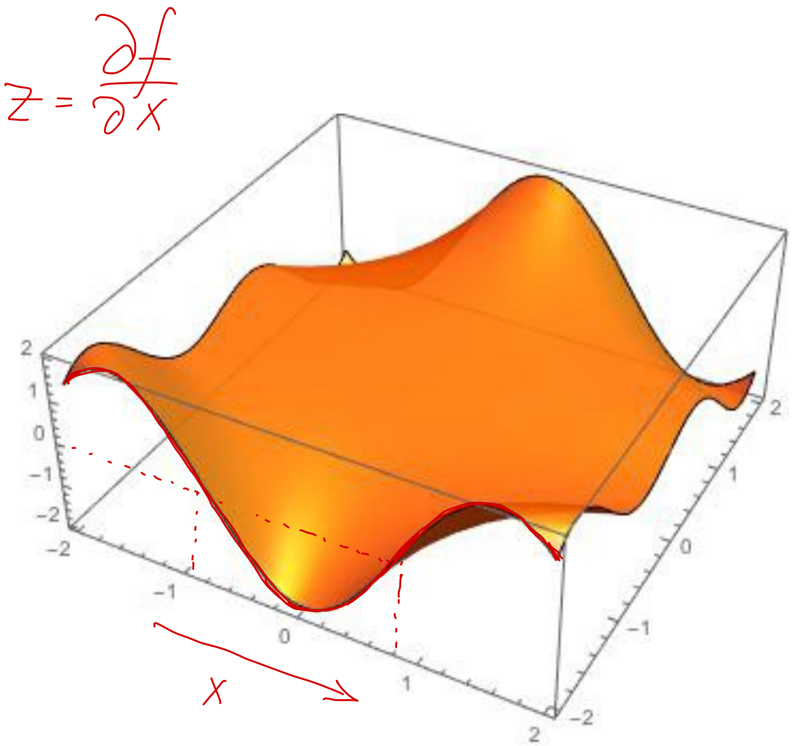
On peut définir ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles d'ordre p.
Par exemple, $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}$ et ainsi de suite.

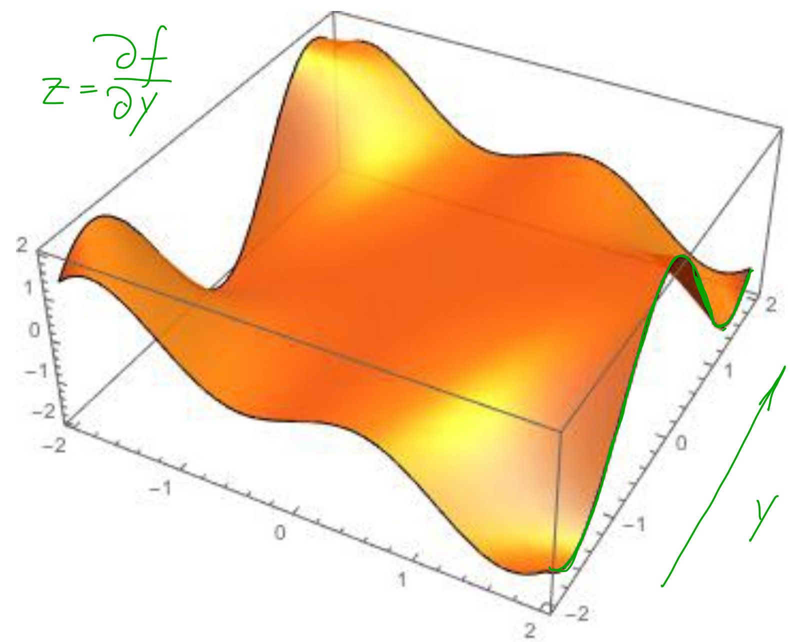


Ex 3. $f(x,y) = \sin(xy) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$



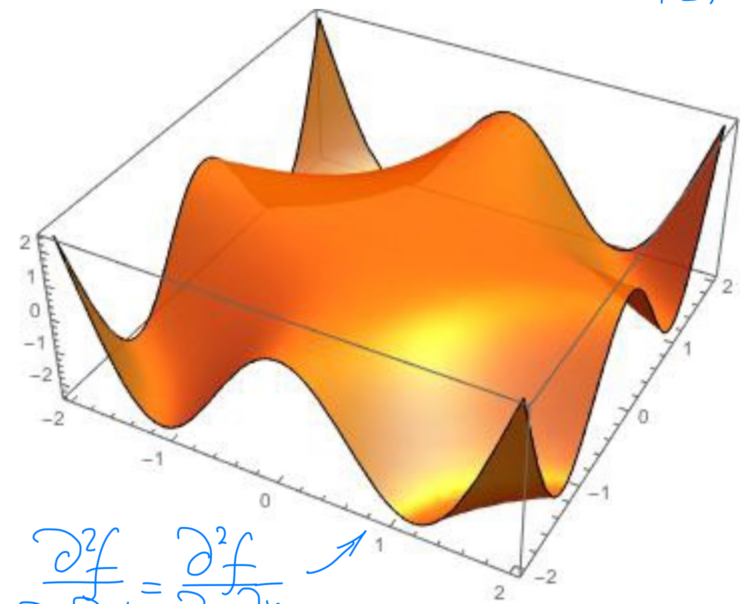


Dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\cos(xy)\right) =$

$= \cos(xy) - xy\sin(xy)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos(xy)\right) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Trés souvent (mais pas toujours !) on a : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$



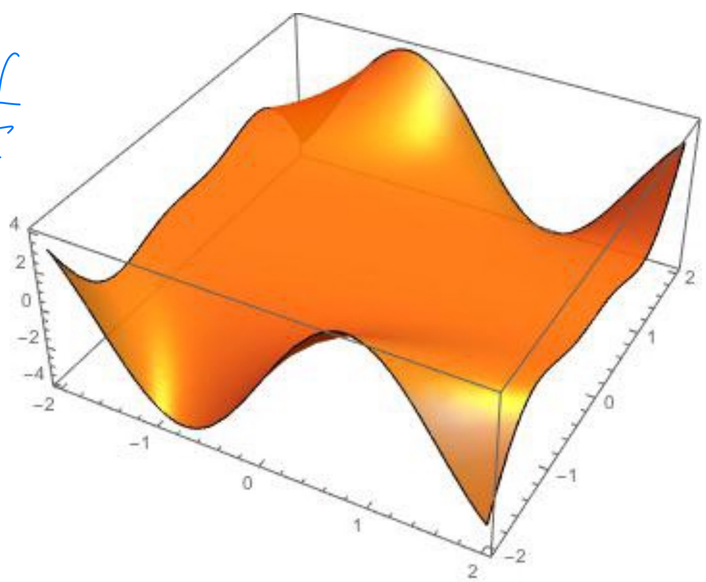
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(xy)\right) = -y^2\sin(xy)$$

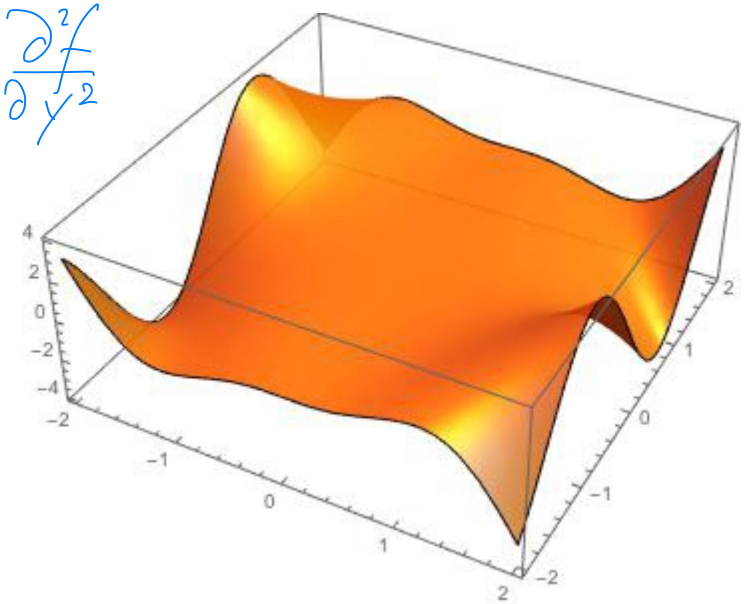
notation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos(xy)\right) = -x^2\sin(xy)$$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$



$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$



On peut calculer les derivées d'ordre 3 pour cette fonction

Par exemple, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy) - xy\sin(xy)\right) = -y\sin(xy) - y\sin(xy) - xy^2\cos(xy) =$

$$= -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy).$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y^2\sin(xy)\right) = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

Pour $f(x,y) = \sin(x,y)$, on a : $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{ccccc} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} & = & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} & = & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \\ \neq & & \neq & & \neq \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} & = & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} & = & \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \end{array}$$

On peut calculer pour $f(x,y) = \sin(xy)$ les dérivées partielles d'ordre p $\forall p \in \mathbb{N}^*$. Elles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$. L'ordre de dérivation ne fait pas de différence pour cette fonction.

Thm de Schwartz. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$ tel que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un voisinage de $\bar{a}$ et sont continues en $\bar{a}$.

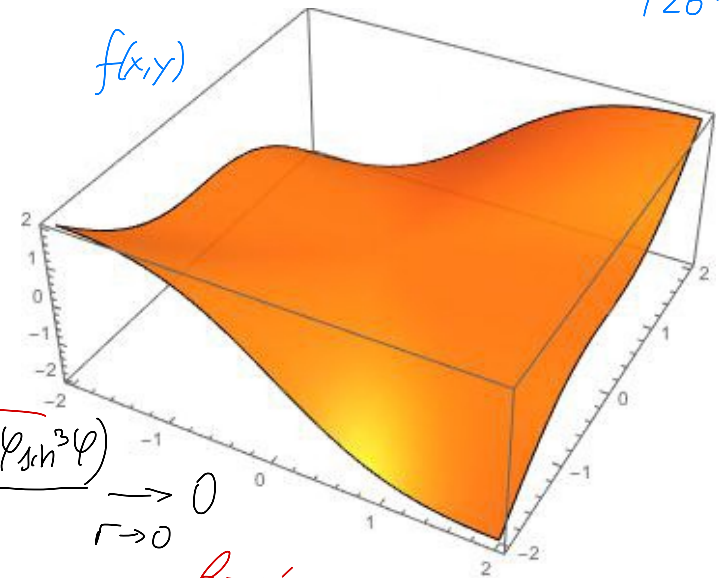
pour deux indices $i \neq j$

Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{a})$ pour les variables x_i, x_j.

Dém: Voir [DZ, §13.2.6].

Ex 4. d'une fonction telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{0}) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{0})$.

$f(x,y)$



$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0}{t(t^2+0)} = 0\,; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0\cdot t^3}{t(0+t^2)} = 0.$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x(xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{r^{\cancel{5}}\overbrace{(\sin^5\varphi - \cos^2\varphi\sin^3\varphi)}^{\text{borné}}}{\cancel{r^4}} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{3y^2x(x^2+y^2) - 2y(xy^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4x + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \frac{r^5\overbrace{(\sin^4\varphi\cos\varphi + 3\cos^3\varphi\sin^2\varphi)}^{\text{borné}}}{r^4} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ puisque les derivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$ (Thm 2).

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5 - 0\cdot t^3}{t(t^2+0)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^5}{t^5} = 1$$

$$\# \quad \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

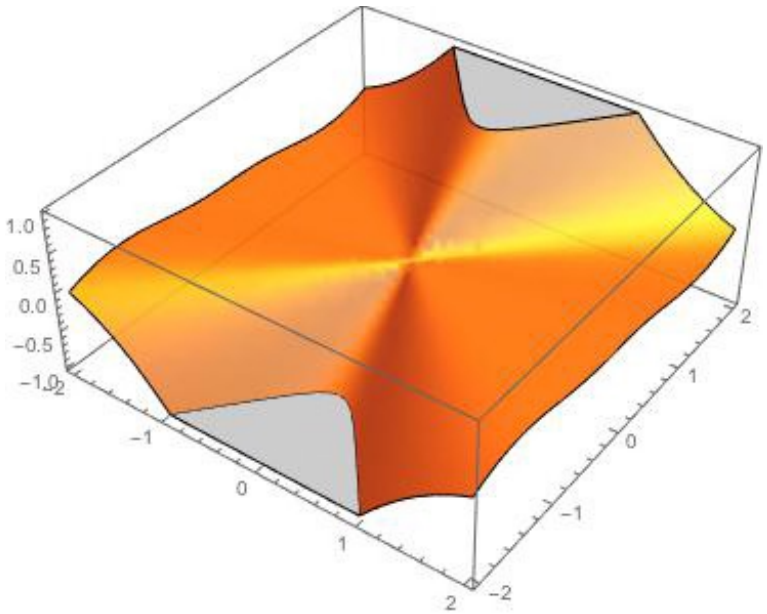
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0 - 0\cdot t^3}{t(0+t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^5} = 0$$

Exercice: Vérifier que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

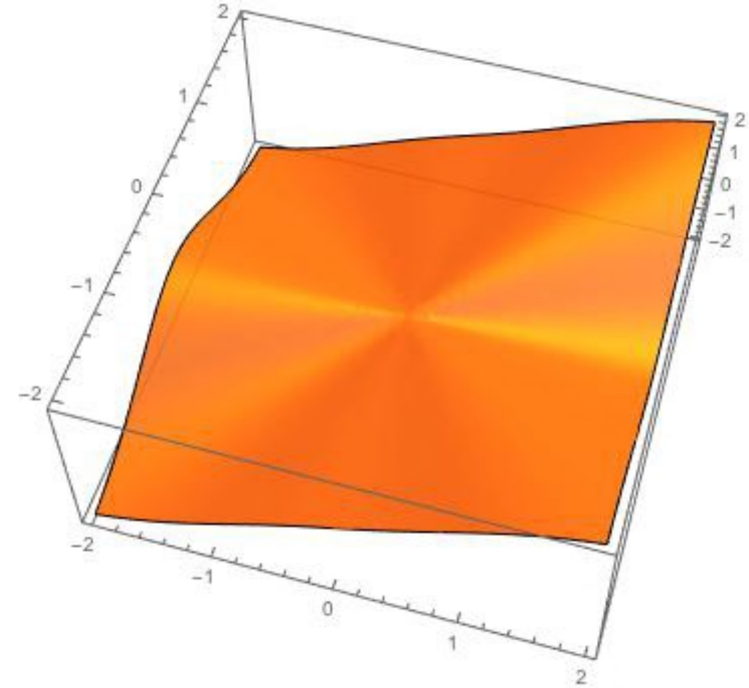
$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{(x,y)\neq(0,0)} = \frac{6x^2y^4 + y^6 - 3x^4y^2}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0)$$

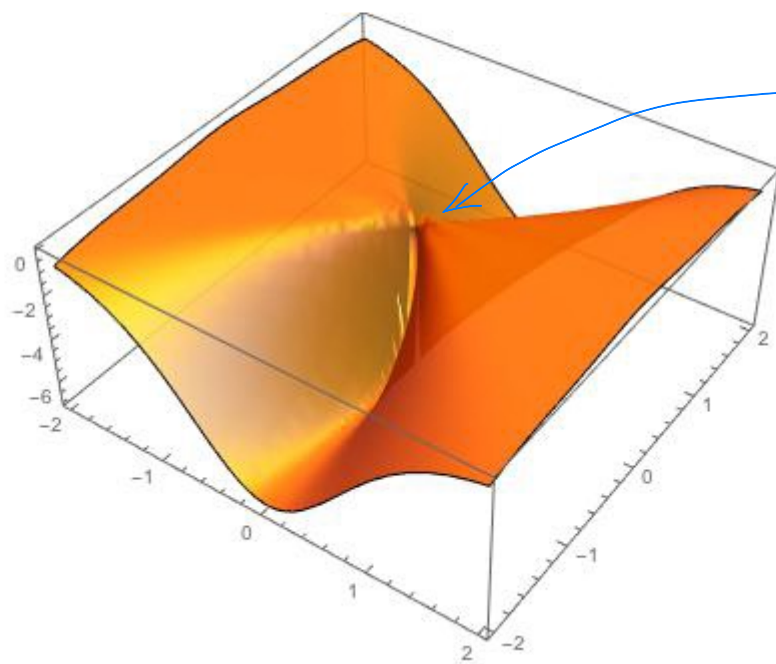
$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{\lim} \text{ n'existe pas !}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $\mathbb{R}^2$



$\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur $\mathbb{R}^2$





$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$