

Rappel: la différentielle

-110-

Déf. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in E$.

On dit que f est dérivable au point $\bar{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\bar{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $r: E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \text{ pour tout } \bar{x} \in E$$
$$\text{et } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0.$$

Déf. $L_{\bar{a}}$ s'appelle la différentielle de f au point $\bar{a} \in E$ $L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$ notations

Remarque. Une transformation linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction telle que

$$T(\alpha \bar{x} + \beta \bar{y}) = \alpha T(\bar{x}) + \beta T(\bar{y}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

En particulier, $T(\bar{0}) = 0$.

Ex. $T(x, y) = x + y$ est une transformation linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$T(x, y) = x + y + 2$ n'est pas une transformation linéaire.

Remarques. (1) Comparaison avec la dérivabilité des fonctions d'une seule variable. -111-

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $r: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = f(a) + \ell(x-a) + r(x) \quad \forall x \in I$, et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r(x)}{|x-a|} = 0.$$

$\ell: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{bijection}} \text{transformations linéaires } \ell \cdot t = \ell t \in \mathbb{R}; \ell(\alpha t_1 + \beta t_2) = \alpha \ell t_1 + \beta \ell t_2, \ell(0) = 0.$

En effet, $\ell = f'(a) \in \mathbb{R}$ est la dérivée de f en a .

$\Rightarrow$ La définition de dérivabilité s'applique dans le cas $n=1$.

(2) Soit $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ transformation linéaire.

Posons $\bar{\ell} = (L(\bar{e}_1), L(\bar{e}_2) \dots L(\bar{e}_n)) \in \mathbb{R}^n$, où $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^n$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Alors $L(\bar{v}) = L(v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + \dots + v_n \bar{e}_n) \stackrel{\text{L est linéaire}}{=} v_1 L(\bar{e}_1) + v_2 L(\bar{e}_2) + \dots + v_n L(\bar{e}_n) =$

$$= \langle \bar{v}, \bar{\ell} \rangle = \underbrace{(L(\bar{e}_1) \dots L(\bar{e}_n))}_{\text{matrice } n \times 1} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{\text{vecteur}} \text{ pour tout } \bar{v} \in \mathbb{R}^n.$$

$\dim=1$ la différentielle de f en $a \iff f'(a) = \ell \in \mathbb{R}$ matrice 1×1

$\dim=n$ la différentielle de f en $\bar{a} \iff \bar{\ell} \in \mathbb{R}^n, \bar{\ell} = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1) \dots L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$
matrice $n \times 1$.

Théorème 1 Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{a} \in E$ tel que f est dérivable en $\bar{a}$
 de différentielle $L_{\bar{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors: (1) f est continue en $\bar{a} \in E$

(2) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, la dérivée directionnelle $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe et

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$$

(3) Toutes les dérivées partielles existent de f en $\bar{a}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) \quad \text{où } \bar{e}_k = (0, 0, \dots, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0).$$

Le gradient de f existant en $\bar{a}$, et

$$\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$$

(4) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

(5) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\|=1$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$, et

-113-

$Df\left(\bar{a}, \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}\right) = \|\nabla f(\bar{a})\| \Rightarrow$ le gradient donne la direction de la plus grande croissance de f en $\bar{a}$ (si $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$).

Dém: (1) f est dérivable en $\bar{a} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x})$, et

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0.$$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \left(f(\bar{a}) + \underbrace{L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a})}_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \rightarrow 0 \\ L_{\bar{a}} \text{ est continue, } L_{\bar{a}}(\bar{0}) = 0}} + \underbrace{r(\bar{x})}_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \rightarrow 0}} \right) = f(\bar{a}) \Rightarrow f \text{ est continue en } \bar{x} = \bar{a}.$$

(2) Soit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$. Soit $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{v}) : I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$

$\Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = g'(t) \Big|_{t=0}$, si cette dérivée existe.

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t} \stackrel{\bar{x} - \bar{a} = t\bar{v}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(\bar{a})} + L_{\bar{a}}(t\bar{v}) + r(\bar{a} + t\bar{v}) - \cancel{f(\bar{a})}}{t} =$$

$\uparrow$ f est dérivable en $\bar{a}$, $\bar{x} = \bar{a} + t\bar{v}$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\cancel{t} \cdot L_{\bar{a}}(\bar{v})}{\cancel{t}} + \frac{r(\bar{a} + t\bar{v})}{\|t\bar{v}\|} \cdot \underbrace{\frac{\|t\bar{v}\|}{t}}_{\substack{= |t| \cdot \|\bar{v}\| \\ = \pm \|\bar{v}\|}} \right) = L_{\bar{a}}(\bar{v}).$$

$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})}$$

$$(3) \quad \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = Df(\bar{a}, \bar{e}_k)}_{(2)} = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) \Rightarrow \exists \nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$$

$$(4) \quad \xRightarrow{\text{Remarque 2}} L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \bar{v}, L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n) \rangle \stackrel{(3)}{=} \langle \bar{v}, \nabla f(\bar{a}) \rangle = Df(\bar{a}, \bar{v})$$

$$(5) \quad \text{Soit } \|\bar{v}\|=1. \Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle = \|\nabla f(\bar{a})\| \cdot \underbrace{\|\bar{v}\|}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(\nabla f(\bar{a}), \bar{v})}_{\leq 1} \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$$

$$\begin{array}{l} \text{Soit } \bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|} \Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = \left\langle \nabla f(\bar{a}), \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\bar{a})\|^2}{\|\nabla f(\bar{a})\|} = \|\nabla f(\bar{a})\|. \\ \text{Soit } \nabla f(\bar{a}) \neq 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Si $\nabla f(\bar{a}) \neq \vec{0}$, la valeur maximale de la dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$ en direction d'un vecteur unitaire est dans la direction du gradient $\nabla f(\bar{a})$. 

Ex 2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$ (plus tard)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$L_{(x,y)}(\bar{v}) = Df((x,y), \bar{v}) = \langle \nabla f(x,y), \bar{v} \rangle = 2xv_1 + 2yv_2$$

$\bar{v} = (v_1, v_2)$

Si $(x,y) = (1,1)$ et $\bar{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,2)$;

$Df((1,1), \bar{v}) = \langle (2,2), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle = 1 + \sqrt{3}$, même qu'avant (cours 11)

Si $(x,y) = (1,1)$ et $\bar{v} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = (\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \Rightarrow$

$$Df((1,1), \bar{v}) = \langle (2,2), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \rangle = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \frac{\|\nabla f(1,1)\|}{\sim 2.82} > 1 + \sqrt{3} \sim 2.73$$

La courbe de niveau de $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} \Rightarrow \text{cercle de rayon } r \text{ et centre } (0,0)$$

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \text{ sur le cercle: } x^2 + y^2 = r^2$$

$\rightarrow$ est normal à la tangente de la courbe de niveau.

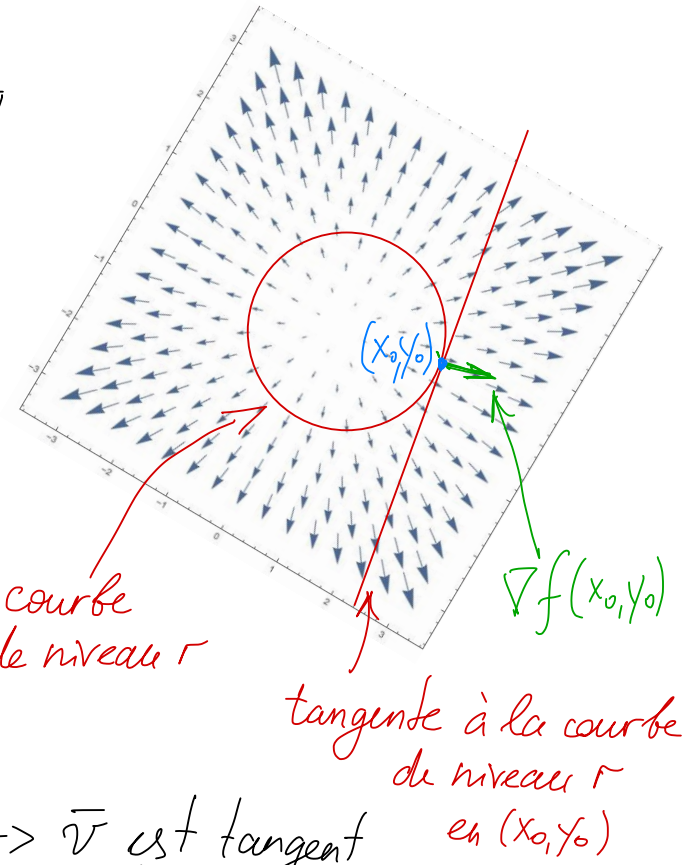
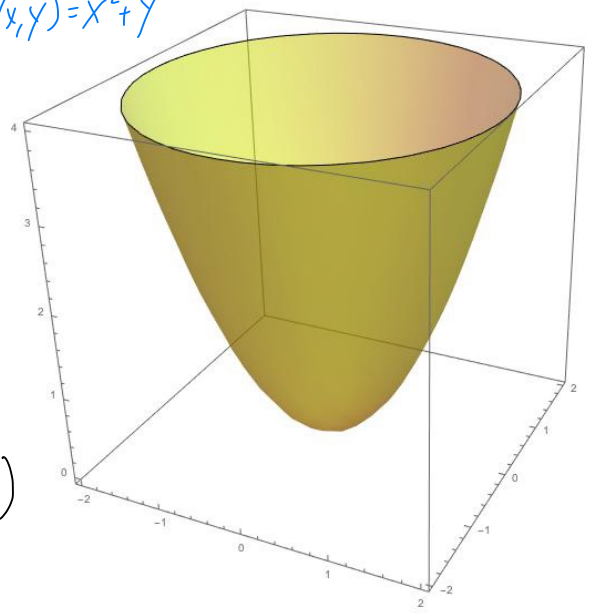
En général, $Df(\bar{a}, \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{v}$ est tangent à la surface de niveau de f en $\bar{a}$

$\nabla f(\bar{a}) \neq 0$

$\nabla f(a) \perp$ droite tangente à la courbe de niveau

$$0 = Df((x_0, y_0), \bar{v}) = \langle \underbrace{\nabla f(x_0, y_0)}_{0 \neq} \bar{v} \rangle = 0 \Rightarrow \bar{v} \perp \nabla f(x_0, y_0) \Leftrightarrow \bar{v} \text{ est tangent au cercle.}$$

$f(x,y) = x^2 + y^2$



Application. Plan tangent à la surface $z = f(x, y)$

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur E ($\Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point de E).

Soit $\bar{a} \in (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ un point du graphique de f .

On cherche une équation du plan tangent à $z = f(x, y)$ en $\bar{a}$.

Soit $F(x, y, z) = z - f(x, y) : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

$F(x, y, z) = 0$ est la surface de niveau de $F \Leftrightarrow z = f(x, y)$

$$\nabla F(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}), 1 \right) \neq \vec{0}$$

$$DF(\bar{a}, \vec{v}) = \langle \nabla F(\bar{a}), \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ est dans le plan tangent à la surface en } \bar{a}.$$

$DF(\bar{a}, \vec{v})$ = la vitesse de croissance de $F(x, y, z)$ en $\bar{a}$ suivant $\vec{v}$

$F(x, y, z) = 0$ sur la surface $\Rightarrow F$ ne change pas sur la surface $\Rightarrow DF(\bar{a}, \vec{v}) = 0$

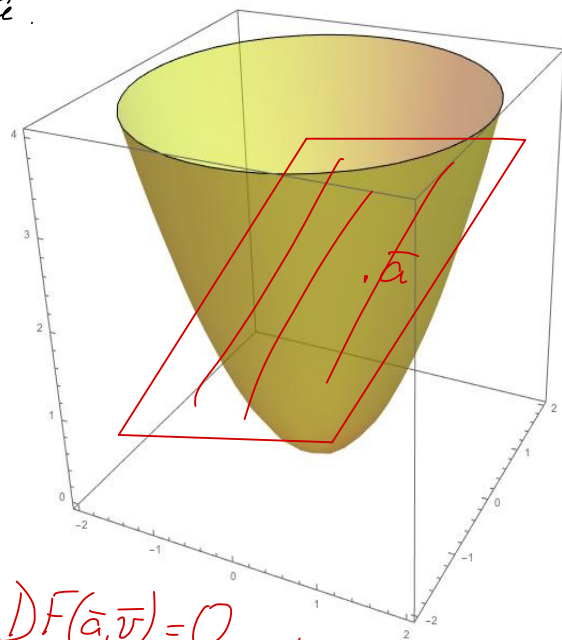
$\Rightarrow$ Pour obtenir l'équation de ce plan on écrit pour $z_0 = f(x_0, y_0)$:
pour tout $\vec{v} \in \text{plan tangent}$

$$\langle \nabla F(\bar{a}), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a})(y - y_0) + 1(z - f(x_0, y_0)) = 0 \Rightarrow \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{a}) \right) = \nabla f(\bar{a}) \right]$$

$$\underline{z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle}$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Alors

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

-117-

Ex 3. $f(x, y) = \sin(xy)$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

$$\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)).$$

Vecteur normal au graphique de $z = \sin(xy)$:

$$\nabla F(x, y, z) = \nabla(f(x, y) - z): \text{ en } (x_0, y_0, \sin(x_0 y_0)):$$

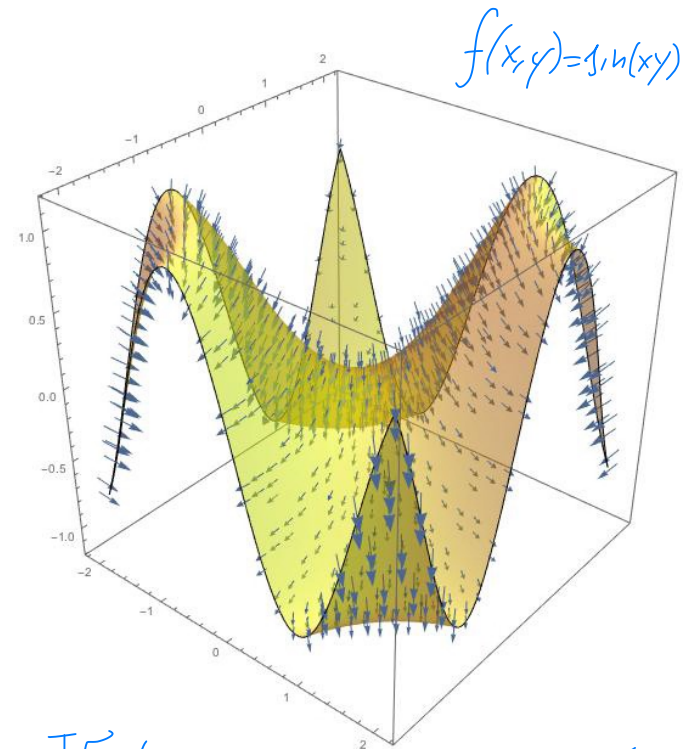
$$\text{est } (y_0 \cos(x_0 y_0), x_0 \cos(x_0 y_0), -1).$$

Plan tangent à la surface $z = \sin(xy)$

en ce point est

$$z = \sin(x_0 y_0) + y_0 \cos(x_0 y_0)(x - x_0) + x_0 \cos(x_0 y_0)(y - y_0)$$

variables



Vecteurs à la surface:
 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right) = \nabla F(x, y, z)$