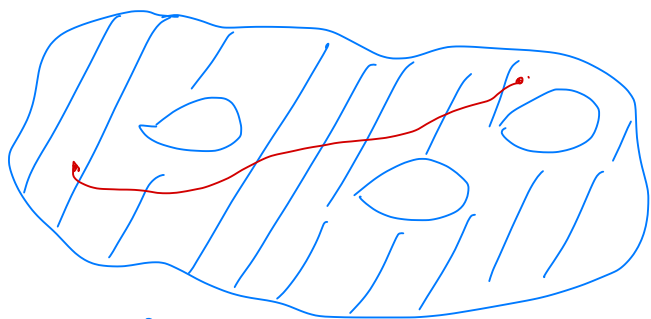


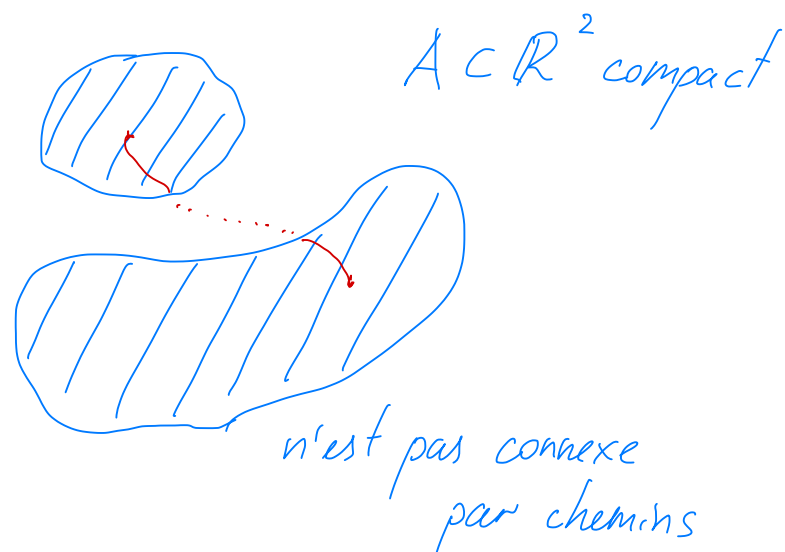
Rappel: Thm: Une fonction continue sur un sous-ensemble compact -100-
atteint son maximum et son minimum.

$(E \subset \mathbb{R}^n \text{ compact}, f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \Rightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) = f(\bar{a}), \exists \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) = f(\bar{b}); \bar{a}, \bar{b} \in E)$.

Remarque. Pour que f atteigne aussi toute valeur intermédiaire entre m et M ,
il suffit que l'ensemble E soit compact et connexe par chemins.



$E \subset \mathbb{R}^2$ compact,
connexe par chemins



Méthodes de démonstration.

-10/-

Méthode 7. Récurrence.

Le principe fondamental de récurrence. Soit $S \subset \mathbb{N}$ sous-ensemble : $0 \in S$, et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$. Alors $S = \mathbb{N}$.

La méthode de récurrence. Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Supposons que (1) $P(n_0)$ est vraie.

(2) $P(n)$ implique $P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$ naturel.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Ex 1. Montrer que $\underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{P(n)} \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \text{ naturel.}$

Dém. par récurrence

(1) La base (l'initialisation) : $P(1) : 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ vrai.

(2) L'hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie. Il faut en déduire $P(n+1)$.

$$P(n+1) \quad \underbrace{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{P(n) \Rightarrow 2 - \frac{1}{n}} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 2 - \frac{n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2} =$$

$$= 2 - \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{\cancel{n(n+1)}}{\cancel{n(n+1)^2}} - \frac{1}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1} - \underbrace{\frac{1}{n(n+1)^2}}_{> 0} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow P(n+1)$$

$\Rightarrow P(n)$ implique $P(n+1)$. Alors par récurrence, $P(n)$ sont vraies $\forall n \geq 1$. $\square$ -102-

Récurrence généralisée: Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$.

Supposons que (1) $P(n_0), \dots, P(n_0+k)$ sont vraies pour un $k \in \mathbb{N}$

(2) $\{P(n), P(n+1), \dots, P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1)$ $\forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Ex 2. Les nombres de Fibonacci $f_1 = 1, f_2 = 1; f_{n+2} = f_n + f_{n+1}, n \in \mathbb{N}^*$.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Proposition. pour tout $n \geq 3$ on a $3f_n = (f_{n+2} + f_{n-2})$.

Dém: (récurrence généralisée): $P(n): 3f_n = f_{n+2} + f_{n-2} \quad \forall n \geq 3$

(1) Base $n=3 \Rightarrow 3f_3 \stackrel{?}{=} f_5 + f_1 : 3 \cdot 2 = 5 + 1$ vrai

$n=4 \Rightarrow 3f_4 \stackrel{?}{=} f_6 + f_2 : 3 \cdot 3 = 8 + 1$ vrai.

(2) Hérédité: Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies $\forall n \geq 3$. Considérons $P(n+2)$.

$$\begin{aligned} \underbrace{3f_{n+2}}_{\text{Fibonacci}} &\stackrel{\text{def}}{=} 3(f_n + f_{n+1}) = 3f_n + 3f_{n+1} \stackrel{P_n, P_{n+1}}{=} (f_{n+2} + f_{n-2}) + (f_{n+3} + f_{n-1}) = \\ &= \underbrace{(f_{n+2} + f_{n+3})}_{f_{n+4}} + \underbrace{(f_{n-2} + f_{n-1})}_{f_n} = f_{n+4} + f_n \Rightarrow 3f_{n+2} = f_{n+4} + f_n \Rightarrow P(n+2) \text{ est vrai.} \end{aligned}$$

Donc $P(n)$ et $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$. Par récurrence généralisée, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 3, n \in \mathbb{N}$. $\square$

Chapitre 4. Calcul différentielle des fonctions de plusieurs variables.

§4.1. Dérivées partielles, le gradient.

Déf. Soit $f: E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert

Soit $g(s) \stackrel{\text{dét}}{=} f(a_1, a_2, \dots, \overset{k}{s}, a_{k+1}, \dots, a_n)$ où $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in E$.

fonction d'une seule variable s

$$g: D = \{s \in \mathbb{R} : (a_1, a_2, \dots, s, a_{k+1}, \dots, a_n) \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Alors si g est dérivable en $a_k \in D$, on dit que la *k-ième dérivée partielle* de f en $\bar{a} \in E$ existe et est égale à $g'(a_k)$.

Notation: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) \equiv D_k f(\bar{a}) \stackrel{\text{dét}}{=} g'(a_k)$

On a:
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t \bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$$

où $\bar{e}_k = (0, 0, \dots, \overset{k}{1}, 0, \dots, 0)$

Ex 1. $f(x, y) = \sin(xy)$; $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

On calcule la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ en (x_0, y_0) .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(1, 0)) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\overbrace{(x_0 + t) \cdot y_0}^{x_0 y_0 + t y_0}) - \sin(x_0 y_0)}{t} ;$$

Si $y_0 = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(0) - \sin(0)}{t} = 0.$

Si $y_0 \neq 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 y_0) \cos(t y_0) + \cos(x_0 y_0) \sin(t y_0) - \sin(x_0 y_0)}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x_0 y_0) (\cos(t y_0) - 1)}{t y_0} + \frac{\cos(x_0 y_0) \sin(t y_0)}{t y_0} \right) = y_0 \cos(x_0 y_0).$$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0 \quad t \rightarrow 0$

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad t \rightarrow 0 \rightarrow 1$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \sin(xy) \Big|_{(x_0, y_0)} = y_0 \cos(x_0 y_0) \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$
dérivée de f par rapport à x, y = y_0 paramètre.

On trouve aussi : $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0 \cos(x_0 y_0).$

Déf. Si toutes les dérivées partielles existent en $\bar{a} \in E$: $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})$, alors on définit le gradient de f en $\bar{a}$ comme

$$\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$$

Notation

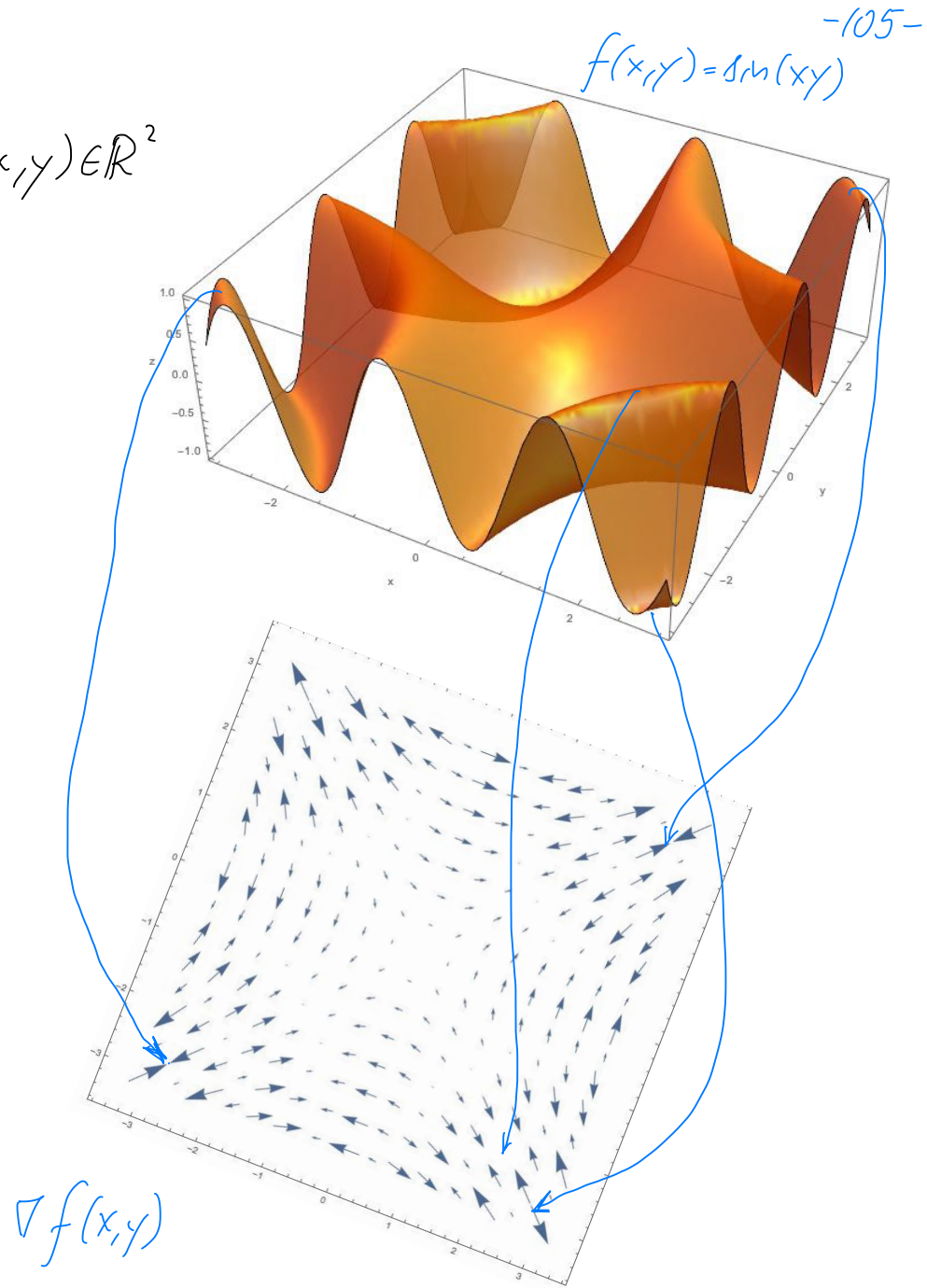
Ex 1. $f(x,y) = \sin(xy)$

$$\nabla f(x,y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)) \text{ pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

On peut visualiser le champ vectoriel

$\nabla f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
donnée par la formule $\nabla f(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Le gradient montre la direction
de la plus grande pente
de la fonction
(à voir plus tard)



Ex 2. $f(x,y) = x^2 + y^2$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

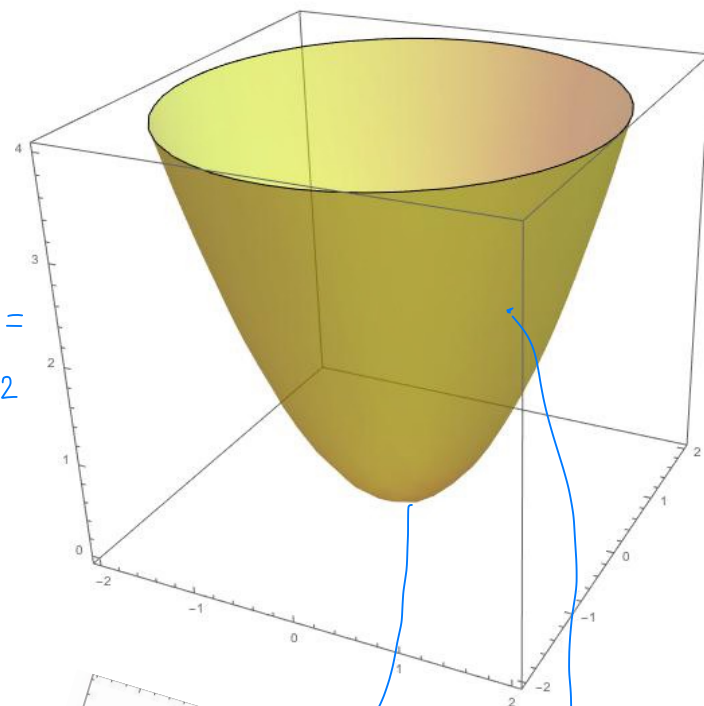
$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0.$$

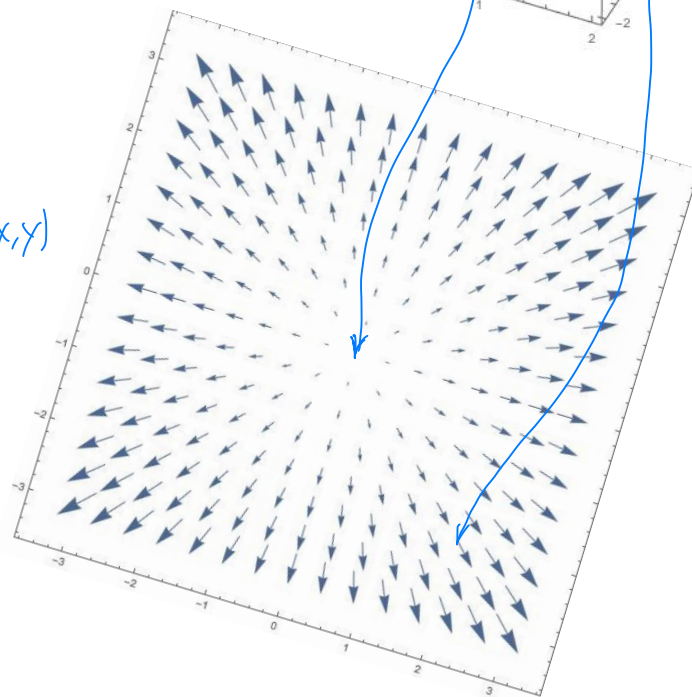
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(x_0+t)^2 + y_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\cancel{t} + \cancel{t^2} + \cancel{y_0^2} - \cancel{x_0^2} - \cancel{y_0^2}}{\cancel{t}} = 2x_0.$$

$f(x,y) =$
 $x^2 + y^2$



$\nabla f(x,y)$



Dérivée directionnelle.

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble ouvert, $\bar{a} \in E$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

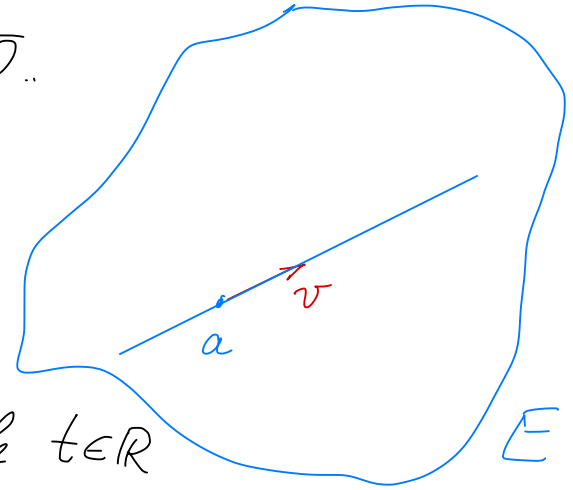
La droite passant par $\bar{a}$ en direction de $\bar{v}$ admet

la paramétrisation $\bar{\ell}(t) = \bar{a} + t\bar{v} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Considérons la fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

et soit $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\bar{a} + t\bar{v})$ - la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}$

$g: D = \{t \in \mathbb{R} : \bar{a} + t\bar{v} \in E\} \rightarrow \mathbb{R}$.



Déf Si g est dérivable en $t=0$, on dit qu'il existe la *dérivée directionnelle* de f en $\bar{a}$ suivant le vecteur $\bar{v}$ (en direction de $\bar{v}$).

La dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$ en direction de $\bar{v}$ est

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \frac{\partial f}{\partial \bar{v}}(\bar{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$$

Notations

Remarques. (1) Si $\bar{v} = \bar{e}_i$; où $\bar{e}_i = (0, 0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$

Alors $Df(\bar{a}, \bar{e}_i) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_i) - f(\bar{a})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ - la i -ème dérivée partielle

Si toutes les dérivées directionnelles existent en $\bar{a}$ (pour tout $\bar{v} \neq \bar{0}$) alors toutes les dérivées partielles existent en $\bar{a}$. La réciproque est fautive en générale (à voir plus tard).

(2) $Df(\bar{a}, \lambda\bar{v})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

$$\begin{aligned} Df(\bar{a}, \lambda\bar{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\lambda\bar{v}) - f(\bar{a})}{t} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + s\bar{v}) - f(\bar{a})}{s/\lambda} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + s\bar{v}) - f(\bar{a})}{s} \cdot \lambda = Df(\bar{a}, \bar{v}) \cdot \lambda. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{Df(\bar{a}, \lambda\bar{v}) = \lambda \cdot Df(\bar{a}, \bar{v})} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

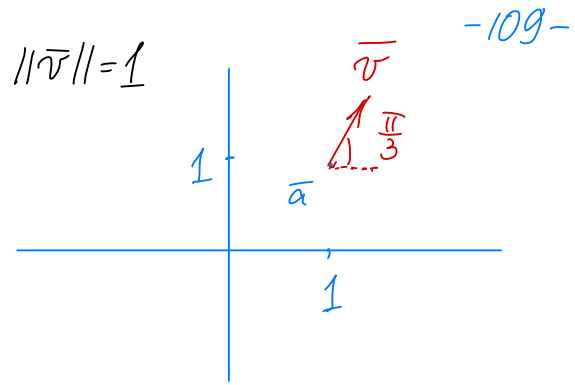
Donc si la dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$ suivant $\bar{v}$ existe, alors

la dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$ suivant $\lambda \cdot \bar{v}$ existe $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$.

Il suffit de calculer les dérivées directionnelles suivant les vecteurs unitaires, $\|\bar{v}\| = 1$.

Ex 2. Df($\bar{a}, \bar{v}$) où $f(x, y) = x^2 + y^2$, $\bar{a} = (1, 1)$, $\bar{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $\|\bar{v}\| = 1$

$$\begin{aligned} Df(\bar{a}, \bar{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + \frac{1}{2}t)^2 + (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t)^2 - 1^2 - 1^2}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + t + \frac{1}{4}t^2 + \cancel{1} + \sqrt{3}t + \frac{3}{4}t^2 - \cancel{1} - \cancel{1}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t + \sqrt{3}t + t^2}{t} = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$



§4.2. Dérivabilité et la différentielle

Déf. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $\bar{a} \in E$.

On dit que f est dérivable au point $\bar{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\bar{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $r: E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \text{ pour tout } \bar{x} \in E$$

$$\text{et } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

Déf $L_{\bar{a}}$ s'appelle la différentielle de f au point $\bar{a} \in E$;

$$L_{\bar{a}} = df(\bar{a}).$$