

Rappel: Limites des fonctions de plusieurs variables.

-89-

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes

Thm. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0 \iff$ pour toute suite d'éléments $\{\bar{a}_k\}$ de $\{\bar{x} \in E : \bar{x} \neq \bar{x}_0\}$, qui converge vers $\bar{x}_0$, la suite $\{f(\bar{a}_k)\}$ converge vers l .

$$\left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \right) \iff \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = l \text{ pour toute suite } \{\bar{a}_k\} \subset E \setminus \{\bar{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0 \right)$$

On utilise souvent cette caractérisation pour démontrer qu'une limite n'existe pas: il suffit de trouver deux suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ convergentes vers $\bar{x}_0$ et telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k)$.

Ex 1.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ n'existe pas.

-90-

Ex 2. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$\{\bar{a}_k\} = (\frac{1}{k}, 0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0 \quad \{\bar{c}_k\} = (0, \frac{1}{k}) \Rightarrow f(\bar{c}_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\{\bar{b}_k\} = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{k^3}}{\frac{2}{k^2}} = 0$$

hypothèse : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

(1) Exercice: Démontrer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ par la définition

Astuce: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$$\begin{aligned} |f(x,y) - 0| &= \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2+y^2} \right| = |x+y| \left| \frac{x^2+y^2-xy}{x^2+y^2} \right| \leq |x+y| \left(1 + \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right) \leq \\ &\leq \left[\begin{array}{l} x^2 \pm 2xy + y^2 \geq 0 \\ \Rightarrow 2|xy| \leq x^2 + y^2 \end{array} \right] \leq |x+y| \left(1 + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{3}{2} (|x| + |y|) \leq \frac{3}{2} \cdot 2 \sqrt{x^2+y^2} = 3\delta \leq \varepsilon \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

on impose

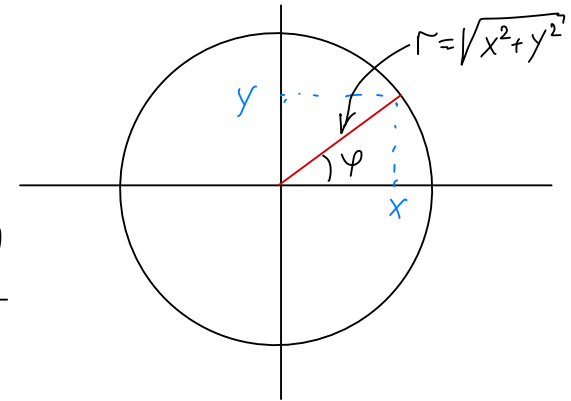
alors $|f(x,y) - 0| \leq \varepsilon \quad \forall (x,y) : \|(x,y) - (0,0)\| \leq \delta$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ par la définition.

(2) On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires. -91-

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{array}{l} r \in \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \text{Si } r \neq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi[\end{array}$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(r, \varphi) = \frac{\cancel{r^3} \cos^3 \varphi + \cancel{r^3} \sin^3 \varphi}{\underbrace{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi}_{r^2}} = \frac{\cancel{r^2} (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{\cancel{r^2}}$$



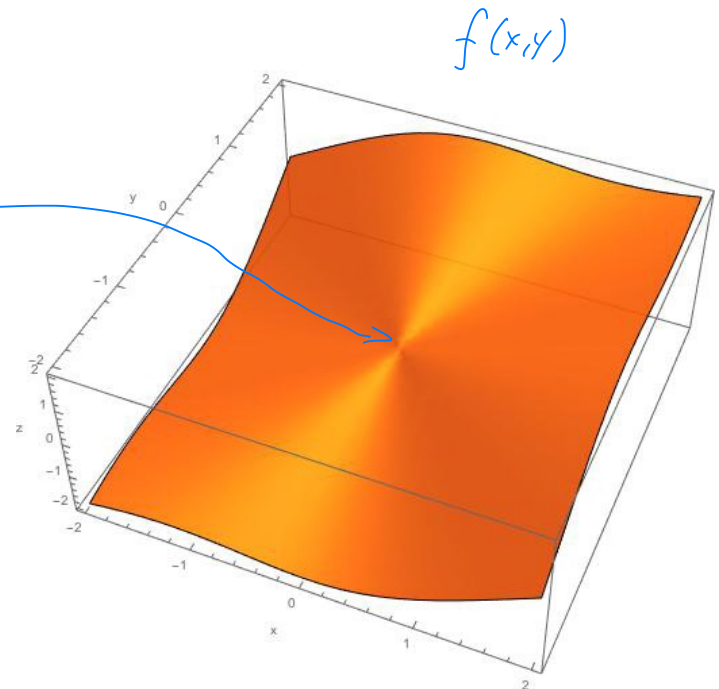
$(x, y) \rightarrow (0, 0) \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$, φ est une fonction inconnue de r .

$$\lim_{r \rightarrow 0} |f(r, \varphi)| = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{\downarrow 0} \underbrace{|\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi|}_{\leq 2} = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0.$$

Cette méthode est souvent efficace pour montrer l'existence des limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$

continue
en (0,0)



Remarques. (1) On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variables en considérant des limites consécutives par rapport à chaque variable.

Ex 1.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit $x \neq 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

De même, $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$. Mais $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas (voir Ex 1, cours 9).

(2) Si la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ existe, et les limites par rapport à chaque variable existent pour tout x et tout y dans le domaine de f , alors on peut échanger l'ordre des limites :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right).$$

(3) L'existence de la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$ n'implique pas en général l'existence des limites $\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$ et $\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$.

(Voir [DZ] § 12.2.11.)

-93-

Théorème des 2 gendarmes. Soient $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$, telles que
 $E \subset \mathbb{R}^n$

$$(1) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l.$$

(2) Il existe $\alpha > 0$: pour tout $x \in \{x \in E : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \alpha\}$, on a
 $f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$.

$$\text{Alors } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l.$$

Dém: Soit $\{\bar{a}_k\} \subset E$ une suite convergente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0$.

Alors (1) $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\bar{a}_k) = l$ (caractérisation à partir des suites).

(2) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $f(\bar{a}_k) \leq h(\bar{a}_k) \leq g(\bar{a}_k)$ pour tout $k \geq k_0$. 2 gendarmes
pour les suites $\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} h(\bar{a}_k) = l$.

$\Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites, puisque $\{\bar{a}_k\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \bar{x}_0$ est une suite arbitraire convergente vers $\bar{x}_0 \Rightarrow \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$. □

Ex 3.
$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(|x| + |y|) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On cherche une fonction $g(x, y)$ telle que $0 \leq |f(x, y) - 0| \leq g(x, y)$ pour (x, y)
au voisinage de $(0, 0)$

$$\text{et } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = 0.$$

Soit $(x, y) \in \overline{B(0,0,1)} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \leq |x| \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \leq |y| \sqrt{x^2+y^2} \leq |y| \Rightarrow |x \cdot y| \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|)$$

$$0 \leq |xy \log(|x|+|y|)| \leq \frac{1}{2}(|x|+|y|) \log(|x|+|y|) = g(x, y)$$

$$\forall (x, y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1.$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \Rightarrow (|x|+|y|) \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$$

Soit $t = |x|+|y| \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t).$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t |\log t| = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t \log t = - \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-\log s}{s} \stackrel{\infty}{=} \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = 0 \Rightarrow \text{par les 2 gendarmes } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Proposition. Continuité d'une fonction composée.

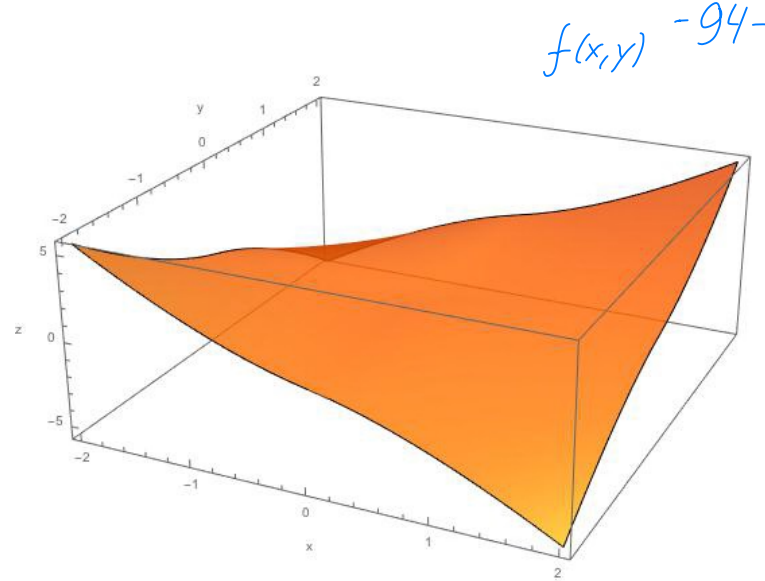
$$A \xrightarrow{\bar{g}} B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\subset \mathbb{R}^n \quad \subset \mathbb{R}^p$$

Si $g_1(\bar{x}) \dots g_p(\bar{x})$ sont continues en $\bar{a} \in A$,
et $f(\bar{y})$ est continue en $(g_1(\bar{a}), g_2(\bar{a}) \dots g_p(\bar{a}))$,

$$\mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

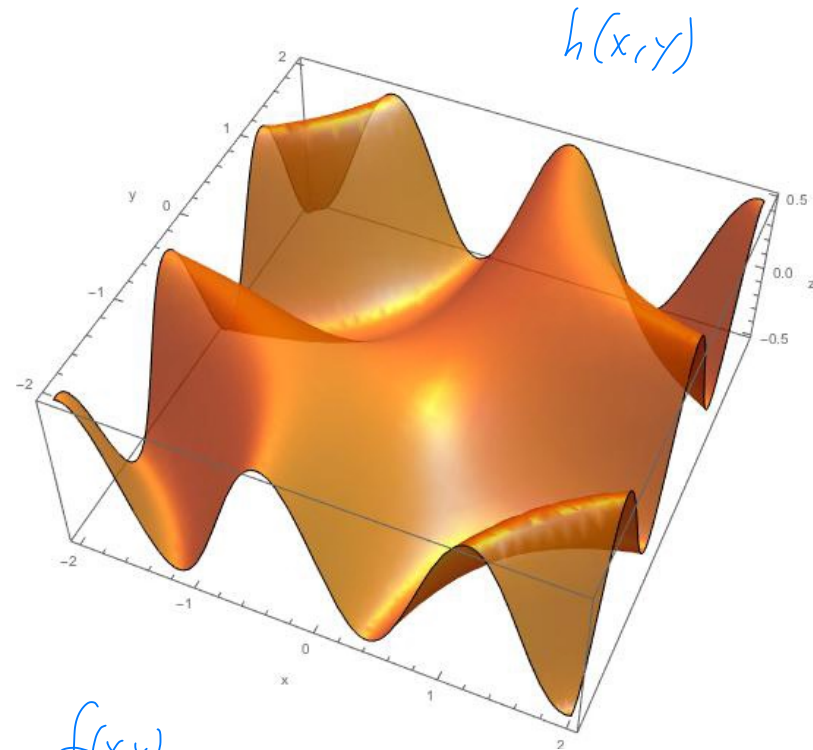
alors $f \circ g(\bar{x})$ est continue en $\bar{x} = \bar{a}$.



Ex 4. $h(x,y) = \sin(xy) \cos(xy) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$g(x,y) = x \cdot y$ continue sur $\mathbb{R}^2$, et $f(t) = \sin t \cos t$ continue sur $\mathbb{R} \Rightarrow f \circ g(x,y) = \sin(xy) \cos(xy)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par la proposition.

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



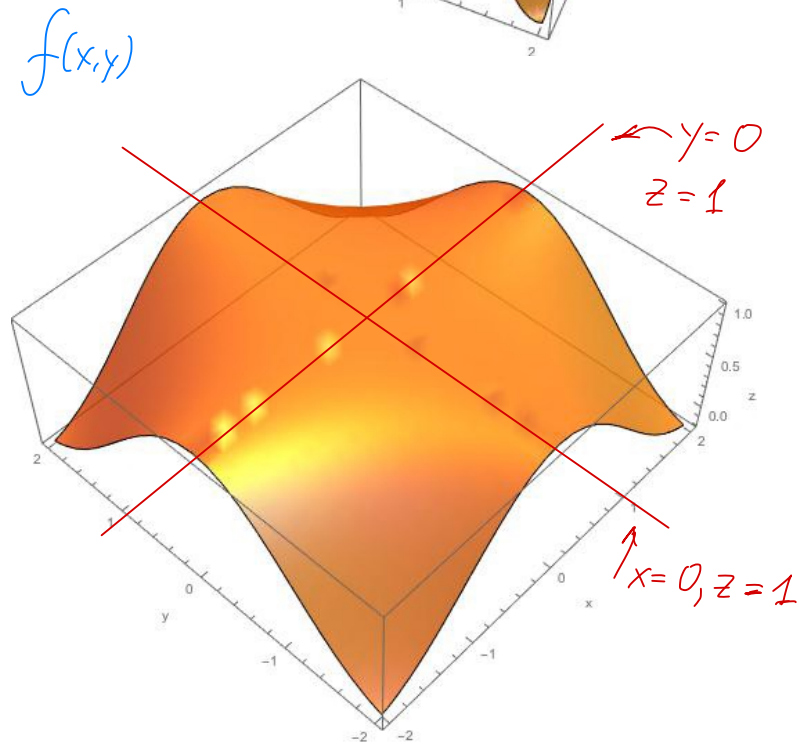
Ex 5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$

$f(x,y) = h \circ g(x,y) : g(x,y) = x \cdot y$ continue sur $\mathbb{R}^2$ (polynôme)

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 = h(0) \Rightarrow h(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ Alors par la proposition $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.



Ex 6. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2} \quad \frac{0}{0}$

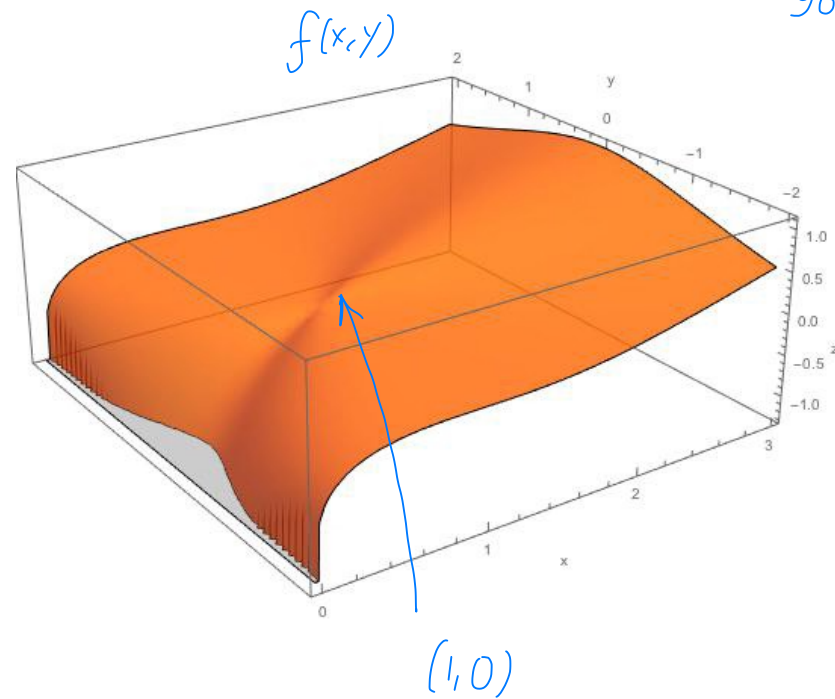
On cherche une fonction $g(x,y)$:
 $0 \leq |f(x,y) - 0| \leq g(x,y)$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y) = 0$.
 au voisinage de $(1,0)$.

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \left| \frac{(x-1)^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2} \right| = \frac{(x-1)^2 |\log x|}{(x-1)^2 + y^2} \leq \frac{\cancel{(x-1)^2} |\log x|}{\cancel{(x-1)^2} + \underbrace{y^2}_{\geq 0}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x,y) - 0| \leq |\log x| = g(x,y)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} |\log x| = \lim_{x \rightarrow 1} |\log x| = 0.$$

$$\Rightarrow \text{par les 2 gendarmes} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \log x}{(x-1)^2 + y^2} = 0.$$



§ 3.3. Maximum et minimum d'une fonction sur un compact.

-97-

Déf $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Alors si $M \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ satisfont

$$(1) f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m) \quad \forall x \in E$$

$$(2) M \in f(E) \quad (m \in f(E))$$

Alors M est le maximum (m est le minimum) de la fonction f sur E .

Ex. $f(x,y) = \sin(x^2+y)$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \max_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = 1 \quad \text{et} \quad \min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x,y) = -1$$

Thm. Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum ($\Leftrightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \exists \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$)

Dém: (1) $\{f(\bar{x})\}_{\bar{x} \in E}$ est borné. Par absurde.

Supposons que $\exists \{\bar{x}_k\} \in E : |f(\bar{x}_k)| \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\bar{x}_k\} \in E$ est une suite bornée.
(E est compact)

$\Rightarrow$ Par Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite convergente.

$\{\bar{x}_{k_p}\}_{p \rightarrow \infty} \rightarrow \bar{x}_0$. Puisque E est fermé $\Rightarrow \bar{x}_0 \in E$

Puisque f est continue $\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(x_{k_p}) = f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$ $\left. \begin{array}{l} \bar{x}_0 \in E \\ \text{mais par construction } |f(\bar{x}_k)| \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{absurde.}$

$\Rightarrow f$ est bornée sur E .

(2) f atteint son min et son max sur E .

$f(E)$ est un sous-ensemble borné $\Rightarrow \exists M = \sup \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$
 $m = \inf \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$.

$\Rightarrow \exists \{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \in E : \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = m, \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = M$

$\{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \subset E$ suites bornées $\Rightarrow \exists$ sous-suites convergentes $\bar{a}_{k_p} \rightarrow \bar{a}$
 $\bar{b}_{k_p} \rightarrow \bar{b}$.

Puisque E est compact $\Rightarrow \bar{a} \in E$ et $\bar{b} \in E$.

$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{a}_{k_p}) \stackrel{f \text{ continue}}{=} f(\bar{a})$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) \stackrel{\text{lim d'une sous-suite} \rightarrow //}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_{k_p}) \stackrel{\text{Alors} \Rightarrow //}{=} m$
 $\Rightarrow \exists \bar{a} \in E : f(\bar{a}) = m = \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$

D'une façon similaire, $\lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{b}_{k_p}) \stackrel{f \text{ continue}}{=} f(\bar{b})$
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) \stackrel{//}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_{k_p}) \stackrel{//}{=} M$
 $\Rightarrow \exists \bar{b} \in E : f(\bar{b}) = M = \max_{\bar{x} \in E} f$



Q1 Soit $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\frac{1}{k}, 0) = 0$,
 $\lim_{k \rightarrow \infty} f(0, \frac{1}{k}) = 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 0$. Alors:

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

C. La fonction $f(x,y)$ est continue en $(0,0)$.

D. L'information n'est pas suffisante pour décider si la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ existe.

Ex: $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \Rightarrow f(\frac{1}{k}, 0) = \frac{0}{\frac{1}{k^2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$
 $f(0, \frac{1}{k}) = \frac{0}{\frac{1}{k^4}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$

$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}} = \frac{\frac{1}{k}}{1 + \frac{1}{k^2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$; mais $f(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}) = \frac{\frac{1}{k^4}}{\frac{1}{k^4} + \frac{1}{k^4}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.