Analyse II

Section IN/SC

Printemps 2022

Anna Lachowska

Chapitre I. Equations différentielles ordinaires.

§1.1. Définitions et exemples.

Ex 1 $\quad y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$; $y' = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y = ?$ $\quad y(x) = C$ où $C \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = 2$ une solution sur $\mathbb{R}$

$y(x) = C \quad \forall C \in \mathbb{R}$ est une solution plus générale

Déf Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0$$

où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_+$, $y = y(x)$ une fonction inconnue de x

On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Ex 2. $\quad y'' = 0$; $y' = C_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y = C_1 x + C_2 \qquad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex 3. $y + y' = 0$ $\quad (e^x)' = e^x$ presque ; $\Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$

$y' = -y$ $\quad \Rightarrow y = e^{-x}$ est une solution $\forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = C e^{-x}$ pour tout $C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ est la solution générale

Ex 1 et Ex 2 sont de la forme $y^{(n)} = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction continue sur I

$\Rightarrow$ on peut resoudre cette équation par intégration.

Ex 3. $y' = -y$ „Equation à variables séparées"

Si on écrit $\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y$ „$\Rightarrow$" $\frac{dy}{y} = -dx$ $\quad y \neq 0$

variables séparées

„$\Rightarrow$" $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = -\int dx$

$\Rightarrow \log|y| = -x + C_1$ pour $C_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire

$\Rightarrow |y| = e^{-x} \cdot \underbrace{e^{C_1}}_{C_2 > 0} = C_2 e^{-x}, \; C_2 > 0 \Rightarrow y = \pm C_2 e^{-x}$, mais $y = 0$ est aussi une solution !

$\Rightarrow \quad y(x) = C e^{-x}, \; C \in \mathbb{R}, \; x \in \mathbb{R}$ est la solution générale de cette équation

Terminologie $E(x, y, \ldots y^{(n)}) = 0$ $(*)$ équation différentielle (ED)

Déf Un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est *l'ordre* de l'équation $(*)$ si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

Déf. Si $(*)$ est un polynôme linéaire en $y, y' \ldots y^{(n)}$, alors l'équation est dite *linéaire*.

Ex 4.
(a) $y + y' = 5x + 1$ est une équation différentielle lin. d'ordre 1

(b) $2x^2 y + y''' = 0$ est une ED linéaire d'ordre 3

(c) $y' + 3y'' = 0$ est une ED linéaire d'ordre 2

Déf. Si l'expression $(*)$ ne contient pas de x, l'équation $(*)$ est dite *autonome*.

Ex 4: (a), (b) ne sont pas autonomes; (c) est autonome.

Déf *La solution générale* d'une ED est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

Déf. Résoudre le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales) pour l'equation $E(x, y, y', .. y^{(n)}) = 0$ c'est de trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y: I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $E(x, y, .. y^{(n)}) = 0$ sur I et $\underbrace{y(x_0) = b_0,\ y(x_1) = b_1, \dots y'(x_2) = \dots \text{ etc}}_{\text{conditions initiales}}$

Le nombre des conditions initiales depend du type de l'ED.

Ex 2. Résoudre le problème de Cauchy pour $y'' = 0$ avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y(2) = 4$.

La solution générale: $y(x) = C_1 x + C_2 \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Conditions initiales: $y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 1$

$y(2) = C_1 \cdot 2 + C_2 = 2C_1 + 1 = 4 \Rightarrow C_1 = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow y(x) = \frac{3}{2} x + 1$ est la solution particulière satisfaisant les conditions initiales

Exercice: $y'' = 0$ avec les conditions: $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

$y(x) = C_1 x + C_2$; $y(0) = C_2 = 1$, $y' = C_1 \Rightarrow y'(0) = C_1 = 3$

$y(x) = 3x + 1$.

§1.2. Equations différentielles à variables séparées. (EDVS)

Déf. $f(y)\cdot y' = g(x)$ est une EDVS où

$f: I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$

$g: J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$.

Explication: $f(y)\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ „ => " $\underbrace{\int f(y)\,dy}_{\text{seulement } y} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{seulement } x}$

Une fonction $y: J' \subset J \to I$ de classe C^1 satisfaisant l'équation $f(y)\cdot y' = g(x)$ est une solution.

Ex 3. $y' = -y$ est une EDVS

$$\underbrace{\frac{1}{y}}_{f(y)} \cdot y' = \underbrace{-1}_{g(x)}$$

Théorème (Existence et unicité d'une solution de EDVS).

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \; \forall y \in I$
$g : J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple
$(x_0 \in J,\ b_0 \in I)$, l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ $\quad (**)$
admet une solution $y : J' \subset J \longrightarrow I$ vérifiant
la condition initiale $y(x_0) = b_0$.

Si $y_1 : J_1 \to I$ et $y_2 : J_2 \to I$ sont deux solutions
telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.

Méthodes de démonstration. Raisonnement mathématique


Euclid
(325–265 BC)

Déf. Une *proposition* est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Ex. (a) Il existe une infinité de nombres premiers. ← Vrai

(b) $\cos 0 = 0$ ← Faux

(c) Ouvrez la porte ! ← n'est pas une proposition.

Déf. Une *démonstration* est une suite d'implications logiques qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenues.

Ex 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Alors $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

„Démonstration": $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$ Vrai

(pour $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$).

Cette „démonstration" est fallacieuse.

Si P, Q sont deux propositions telles que $P \Rightarrow Q$ et Q est vraie, cela n'implique pas que P soit vraie.

Ex. $-5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$ vrai.

faux $\quad \cdot 0 \quad$ vrai

Démonstration d'Ex 1 On utilise le même calcul:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Alors on a: $(a-b)^2 \geq 0$ (puisque $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$)

$$(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow$$

$$\overset{a,b\geq 0}{\Rightarrow} (a+b) \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$\blacksquare$

Méthodes de démonstration

Méthode 1. Démonstration directe: $P \Rightarrow$ implications logiques, axiomes, propositions connues $\Rightarrow Q$

P: conditions données

Q: proposition désirée

Méthode 2. Raisonnement par contraposée

$P \Rightarrow Q$ (implique) $\iff$ (est équivalent à) non $Q \Rightarrow$ non P

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

Ex 2. Si $\underbrace{r \in \mathbb{R}_+ \text{ est irrationnel}}_{P}$, alors $\underbrace{\sqrt{r} \text{ est aussi irrationnel}}_{Q}$.

Dém: par contraposée: Démontrons que $\neg Q \Rightarrow \neg P$.

Soit $r \in \mathbb{R}_+$; Si $\underbrace{\sqrt{r} \text{ est rationnel}}_{\neg Q} \Rightarrow \sqrt{r} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}$, $q > 0$ (déf d'un nombre rationnel)

Alors $\underbrace{r = (\sqrt{r})^2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ est rationnel}}_{\neg P}$ puisque $p^2, q^2 \in \mathbb{N}$, $q^2 > 0$.

Par contraposée, cela implique que

Si $r \in \mathbb{R}_+$ est irrationnel, alors $\sqrt{r}$ l'est aussi $\blacksquare$

Ex 3.

Exercice : trouver une faute dans l'argument :

On sait que $3 > 2 \;\cancel{\Rightarrow}$

$\log \frac{1}{2} = -\log 2 < 0$

$$3 \log \frac{1}{2} > 2 \log \frac{1}{2} \Rightarrow$$

Multiplication par un nombre négatif change l'inégalité en opposée.

$$\log \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) > \log \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

$3 > 2 \Rightarrow$

$3 \log \frac{1}{2} < 2 \log \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\log \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) < \log \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \Rightarrow$

$\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$.