Rappel: EDVS : $f(y)\cdot y' = g(x)$, $f: I \to \mathbb{R}$ continue, $g: J \to \mathbb{R}$ continue

Théorème (Existence et unicité d'une solution de EDVS)

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ $\forall y \in I$.
$g: J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$
l'équation $f(y)\cdot y'(x) = g(x)$ $(**)$
admet une solution $y: J' \subset J \to I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$.
Si $y_1: J_1 \to I$ et $y_2: J_2 \to I$ sont deux solutions telles que
$y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.

Dém: (existence) Soit $F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)\,dt \Rightarrow F(y)$ est dérivable et monotone

puisque $F'(y) = f(y) \neq 0$ sur I
et $F(b_0) = 0$

$\Rightarrow F(y)$ est inversible sur I

Soit $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt \Rightarrow G(x_0) = 0$, G est dérivable sur J
et $G'(x) = g(x)$

Soit $y(x) = F^{-1}(G(x))$ dans un voisinage de x_0 (on sait que F est inversible sur $I \ni b_0$)

On va montrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y)\cdot y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, qui satisfait $y(x_0) = b_0$.

On a: $F(y(x)) = G(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$

$$\Rightarrow \quad F'(y(x))\cdot y'(x) = G'(x) \underset{\substack{\text{par la déf}\\ \text{de } F(x),\, G(x)}}{\Rightarrow} f(y)\cdot y'(x) = g(x)$$

De plus, $y(x_0) = F^{-1}(\underbrace{G(x_0)}_{G(x_0)=0 \text{ par la déf de } G}) = \underbrace{F^{-1}(0)}_{F(b_0)=0 \text{ par la déf de } F} = b_0.$

$$\Rightarrow \quad y(x_0) = b_0$$

$\square$

Idée: $f(y)\dfrac{dy}{dx} = g(x)$ „$\Leftrightarrow$" $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx \Leftrightarrow F(y) = G(x)$

Unicité: voir dans [DZ].

Résumé: EDVS: $f(y)\cdot y' = g(x)$ $\quad$ $f: I \to \mathbb{R}$ continue, $g: J \to \mathbb{R}$ continue

Pour résoudre $\underbrace{\int f(y)\,dy}_{\text{une primitive (sans constante)}} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{la primitive générale (avec une constante)}}$

Ex 1. $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$ EDVS : $f(y) = \frac{1}{y^2}$: $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$

$\mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$ $f(y) \neq 0$

$g(x) = 1$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

pas de constante constante

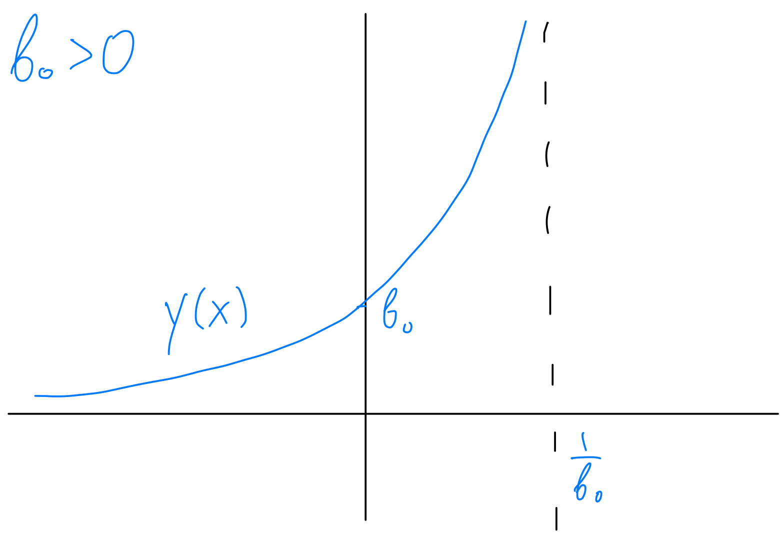
$\Rightarrow y = -\frac{1}{x+C}$ $\forall C \in \mathbb{R}$ - la solution générale sur $]-\infty, -C[$ et $]-C, +\infty[$

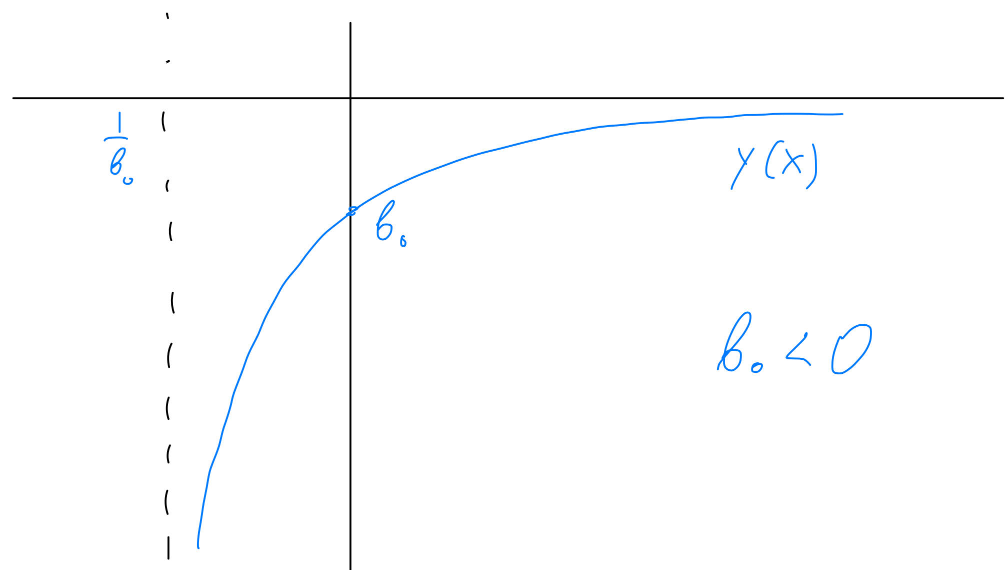
Supposons qu'on cherche une solution telle que $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{b_0} \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} = \frac{b_0}{1 - x b_0}$

Si $b_0 > 0 \Rightarrow \frac{1}{b_0} > 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $]-\infty, \frac{1}{b_0}[\ni 0$ - la solution particulière $b_0 > 0$.

Si $b_0 < 0 \Rightarrow \frac{1}{b_0} < 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $]\frac{1}{b_0}, +\infty[\ni 0$ - la solution particulière $b_0 < 0$





Déf Une solution maximale de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0)=b_0$, $x_0 \in J$, $b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus grand intervalle possible.

Le théorème sur EDVS dit que si $f(y) \neq 0$ sur I, alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale.

Dans Ex 1. on a trouvé les solutions maximales pour les conditions initiales $x_0 = 0$, $b_0 \in \mathbb{R}^*$, $b_0 > 0$ et $b_0 < 0$.

§1.3. Équations différentielle linéaire du premier ordre (EDL1).

Déf Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \quad \text{où } p, f : I \to \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1).

Une solution est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

Comment résoudre une EDL1 ?

$y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$.

Considéront l'équation $y'(x)+p(x)y(x)=0$

Elle s'appelle l'équation homogène associée à l'EDL1 $y'(x)+p(x)y(x)=f(x)$.

Attention: dans [DZ] on utilise le terme homogène pour une autre équation.

$\Rightarrow$ Soit $y(x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Soit $\frac{y'(x)}{y(x)}=-p(x)$ EDVS $\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx$

$\Rightarrow \log|y| = -P(x)+C_1$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow |y| = e^{-P(x)+C_1} = \underbrace{e^{C_1}}_{C_2>0} \cdot e^{-P(x)} \Rightarrow y(x)=Ce^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}^*$

Mais $y(x)=0$ est une solution aussi $\Rightarrow$

$$y(x)=Ce^{-P(x)}$$

, $C\in\mathbb{R}$ est la solution générale de l'equation homogène associée $y'(x)+p(x)y(x)=0$ sur $I\subset\mathbb{R}$

$\forall x \in I$, $\forall C \in \mathbb{R}$

Principe de superposition de solutions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $p, f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues

Supposons que $\underline{v_1} : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation

$$y' + \underline{p(x)}\, y = \underline{f_1(x)}$$

et $\underline{v_2} : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation

$$y' + \underline{p(x)}\, y = \underline{f_2(x)}$$

Alors pour tout couple $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ est une solution de l'équation $y' + p(x) y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$.

Vérification: $v'(x) + p(x) v(x) = c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + p(x)\left(c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)\right) =$

$$= \underbrace{c_1 v_1'(x) + c_1 p(x) v_1(x)}_{c_1 f_1(x)} + \underbrace{c_2 v_2'(x) + c_2 p(x) v_2(x)}_{c_2 f_2(x)} = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

par la déf de $v_1(x)$ et $v_2(x)$

$\blacksquare$

Méthode de la variation de constante.

On cherche une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$; $p, f : I \to \mathbb{R}$ continues sous la forme:

Ansatz: $$v(x) = \underbrace{C(x)}_{\text{fonction inconnue de } x} e^{-P(x)}$$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Si $v(x)$ est une solution de l'équation $\Rightarrow v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$.

$$\Rightarrow c'(x) e^{-P(x)} + \cancel{c(x) \cdot e^{-P(x)}(-p(x))} + \cancel{p(x) \cdot C(x) e^{-P(x)}} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad c'(x) = f(x) e^{P(x)} \Rightarrow c(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx.$$

$\Rightarrow$ Une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$

est
$$v(x) = \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) \cdot e^{-P(x)}$$
où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Exercice: Vérifier que $v(x)$ satisfait l'équation $v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

<u>Ex2.</u> $y' + y = 5x+1$. EDL1 avec $p(x) = 1$, $f(x) = 5x+1$.

$p, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues

$P(x) = \int 1\,dx = x$ (une primitive sans constante)

(1) La solution générale de l'équation homogène associée $y' + y = 0$.

est $y(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall C \in \mathbb{R}$.

(2) Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + y = 5x+1$

on calcule: $C(x) = \int f(x)\, e^{P(x)} dx = \int (5x+1)\, e^{x} dx = 5 \underbrace{\int x e^{x} dx}_{\text{par parties}} + \int e^{x} dx =$

$= 5x e^{x} - 5 \int e^{x} dx + \int e^{x} dx = \underbrace{5x e^{x} - 4 e^{x}}_{\text{on peut choisir une constante arbitraire}}$

$\Rightarrow$ une solution particulière de $y' + y = 5x+1$ est

$v(x) = (5x e^{x} - 4 e^{x}) \cdot e^{-x} = 5x - 4$ une solution <u>particulière</u>

<u>Vérification:</u> $v'(x) + v(x) = 5 + 5x - 4 = 5x + 1 = f(x)$:)

Proposition. Soient $p, f : I \to \mathbb{R}$ fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \to \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
Alors la solution générale de cette équation est

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$$

, pour tout $C \in \mathbb{R}$, où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Dém: On va montrer que toute solution de cette équation est de la forme $v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
On a aussi que $v_0(x)$ est une solution de la même équation.
Alors d'après le principe de superposition de solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$.
$\Rightarrow v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation homogène

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0.$$

EDVS $\Rightarrow$ La solution générale de cette équation homogène est

$v(x) = C e^{-P(x)}$, $\underset{\text{arbitraire}}{C \in \mathbb{R}}$ et $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Alors il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) - v_0(x) = C e^{-P(x)}$

$\Rightarrow$ la solution $v_1(x)$ est de la forme $v_1(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}$.

Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, on obtient que l'ensemble de toutes les solutions de l'equation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $\underline{v(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}}$, $\underline{C \in \mathbb{R},\ x \in I}$

Donc, par la definition, $v(x)$ est la solution générale. $\square$