Série d'Entraînement - Topologie, Continuité et Dérivabilité des Fonctions Multivariables

1 Questions Vrai/Faux

1) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent. Alors f est continue en (x_0, y_0).

☐ VRAI ☐ FAUX

2) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0 - t, y_0)}{t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

3) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. On pose

$$(u_1, u_2) = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

Alors la dérivée directionnelle de f est minimale dans la direction du vecteur unitaire $v = (-u_2, u_1)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$. Alors $\partial E \cap \overset{o}{E} = \varnothing$.

☐ VRAI ☐ FAUX

5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-ensemble ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$. Alors $\partial E = \varnothing$.

☐ VRAI ☐ FAUX

2 Questions à Choix Multiples

1) Soit

$$\begin{aligned} F\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \\ (x,y) &\mapsto (\log(\frac{y}{x}), 2x^2+3y) \end{aligned}$$

Alors:

- ☐ F n'est pas bijective.
- ☐ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.
- ☐ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{-3e^u-\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{-3e^u-\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.
- ☐ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.

2) Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f\colon (x,y)\mapsto \arcsin(xy)$ est définie. Alors D est:

- ☐ ni fermé, ni borné
- ☐ fermé, non borné
- ☐ borné, non fermé
- ☐ compact

3) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} \frac{x^2(x+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 \text{ si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{aligned}$$

Alors:

- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$.
- ☐ f est continue, non dérivable en $(0,0)$.
- ☐ f est dérivable, non $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.
- ☐ f est $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.

4) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Le plan tangent au graphique de f en $(1, \sqrt{3}, f(1, \sqrt{3}))$ a pour équation:

- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + z = \frac{\pi}{3}$
- ☐ $-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + z = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + z = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + z = \frac{\pi}{3}$

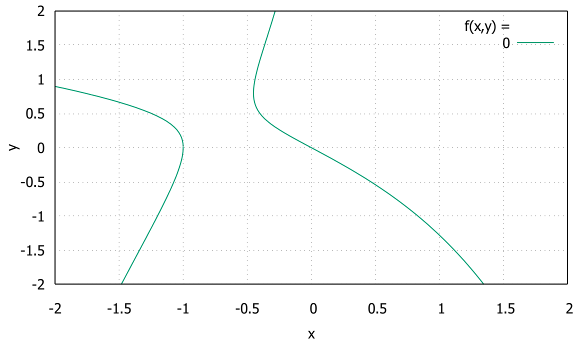
5) Soient $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 \to& \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) \mapsto& (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \\ &= (e^{uvw}, u + 3v + 2w, v^2 + w^2) \end{aligned}$$

On pose $\bar{f} = f \circ g$. Alors:

- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1)$
- ☐ $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = e\frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) + 3\frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) + 2\frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$

6) On considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont la courbe de niveau 0 est représentée ci-dessous.



Soient $p_1 = (-1, 0)$ et $p_2 = (0, 0)$. Alors la courbe de niveau 0 de f définit implicitement, localement, y comme fonction de x:

- ☐ ni en p_1, ni en p_2.
- ☐ en p_1, mais pas en p_2.
- ☐ en p_2, mais pas en p_1.
- ☐ en p_1 et en p_2.

7) Soit

$$F(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t^2} \frac{\operatorname{arctg}(tx)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

Alors $F'(1)$ vaut:

- ☐ $\dfrac{\pi}{12}$
- ☐ $\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\dfrac{5\pi}{12}$
- ☐ $\dfrac{7\pi}{12}$

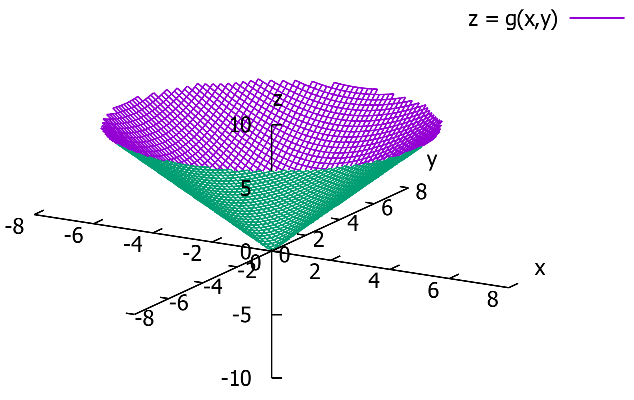
3 Questions plus difficiles

Les questions suivantes sont d'un niveau plus relevé que le niveau moyen attendu des questions de l'examen final.

1**) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Alors $f(-1, 1) = f(1, -1)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

2*) On considère la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont le graphe est représenté par la figure ci-dessous. Alors les dérivées partielles de g existent en $(0, 0)$.



☐ VRAI ☐ FAUX

3*) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{9}\frac{x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Alors:

☐ f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 0.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur $\frac{1}{3}$.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 1.

4*) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto 2\frac{x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{x^6+y^6} \end{aligned}$$

Alors:

☐ f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 0.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 1.
☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 2.

Indice: le numérateur peut être simplifié à l'aide d'une identité remarquable.