Corrigé - Série d'Entraînement - Topologie, Continuité et Dérivabilité des Fonctions Multivariables

1 Questions Vrai/Faux

1) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent. Alors f est continue en (x_0, y_0).

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : contre-exemple:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \text{ ou } y = 0 \\ 0 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$ existe et vaut 0. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe et vaut 0. Pour autant, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 0$ donc $\lim\limits_{k\to\infty} f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 0 \neq f(0,0)$, donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

2) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0-t, y_0)}{t} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : $\forall t \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0-t, y_0)}{t} &= \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0) + f(x_0, y_0) - f(x_0-t, y_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} - \frac{f(x_0-t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} + \frac{f(x_0-t, y_0) - f(x_0, y_0)}{-t} \\ &= \underbrace{\frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}}_{\underset{t\to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} + \underbrace{\frac{f(x_0+T, y_0) - f(x_0, y_0)}{T}}_{\underset{t\to 0}{\to} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} \\ &\text{en posant T = -t dans le second terme (et } T \underset{t\to 0}{\to} 0) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

3) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dérivable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$. On pose

$$(u_1, u_2) = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|}$$

Alors la dérivée directionnelle de f est minimale dans la direction du vecteur unitaire $v = (-u_2, u_1)$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : f étant dérivable en (x_0, y_0), la dérivée directionnelle selon un vecteur unitaire e est donnée par

$$D_f((x_0, y_0), e) = \langle \nabla f(x_0, y_0), e \rangle$$

$\nabla f(x_0, y_0)$ étant un vecteur non-nul, son produit scalaire par un vecteur unitaire e est maximal quand e est de même direction et de même sens que $\nabla f(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire $e = (u_1, u_2)$), et minimal quand e est de même direction et de sens opposé à $\nabla f(x_0, y_0)$ (c'est-à-dire $e = (-u_1, -u_2)$). Il vaut alors

$$D_f((x_0, y_0), (-u_1, -u_2)) = -\|\nabla f(x_0, y_0)\| < 0$$

Pour le vecteur v donné qui est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\nabla f(x_0, y_0)$, la dérivée directionnelle est nulle.

Ce résultat avait déjà été évoqué dans la Série 8, Exercice 3, question iii).

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. Alors $\partial E \cap \overset{o}{E} = \varnothing$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : Résultat vu en cours.

5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors $\partial E = \varnothing$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : On a parfois tendance à confondre le fait que la frontière est vide avec le fait qu'elle est simplement d'intersection vide avec l'ensemble. Exemple: une boule ouverte a pour frontière la sphère qui la délimite (qui n'est donc pas vide). En revanche, la sphère et la boule ouverte n'ont aucun point en commun.

2 Questions à Choix Multiples

1) Soit

$$\begin{aligned} F\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^* \\ (x,y) &\mapsto (\log(\frac{y}{x}), 2x^2+3y) \end{aligned}$$

Alors:

- ☐ F n'est pas bijective.
- ☐ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.
- ☐ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{-3e^u-\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{-3e^u-\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.
- ☒ F est bijective et $\forall (u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*, F^{-1}(u,v) = (\frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}, \frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u)$.

Commentaire : Pour vérifier si la fonction F est bijective, prenons (u,v) dans l'ensemble d'arrivée (ici $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$). Si nous parvenons à trouver un unique couple $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $F(x,y)=(u,v)$, alors non seulement nous aurons démontré la bijectivité de F, mais en plus nous aurons l'expression de sa réciproque.

$$\begin{aligned} (u,v)=F(x,y) &\Leftrightarrow \begin{cases} u=\log(\frac{y}{x}) \\ v=2x^2+3y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y=xe^u \\ 2x^2+3e^u x - v = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La seconde équation est du second degré en x, son discriminant est $9e^{2u}+8v$. Ses solutions sont donc

$$x_1 = \frac{-3e^u-\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}$$

Or $\sqrt{9e^{2u}+8v} \geq \sqrt{9e^{2u}} = 3e^u$, car $v\in\mathbb{R}_+^*$, donc $x_1\leq 0$. On doit donc rejeter x_1 car le premier argument de F doit être strictement positif. Il s'en suit que pour $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$,

$$(u,v)=F(x,y) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4} \\ y=\frac{-3e^u+\sqrt{9e^{2u}+8v}}{4}e^u \end{cases}$$

Le système a une unique solution, donc F est bijective et l'expression de sa réciproque est donnée par la solution du système.
Une autre méthode pour vérifier si la fonction est bijective est de calculer le déterminant de sa matrice Jacobienne. Si $\det(J_F(\bar{p}))\neq 0$, la fonction F est bijective dans un voisinage du point $\bar{p}$. Ici nous avons

$$\det(J_F(x,y)) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{x} & \frac{1}{y} \\ 4x & 3 \end{vmatrix} = -\frac{3}{x}-\frac{4x}{y} = \frac{1}{xy}\left(-3y-4x^2\right),$$

ce qui est negatif pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$. Donc F est bijective sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

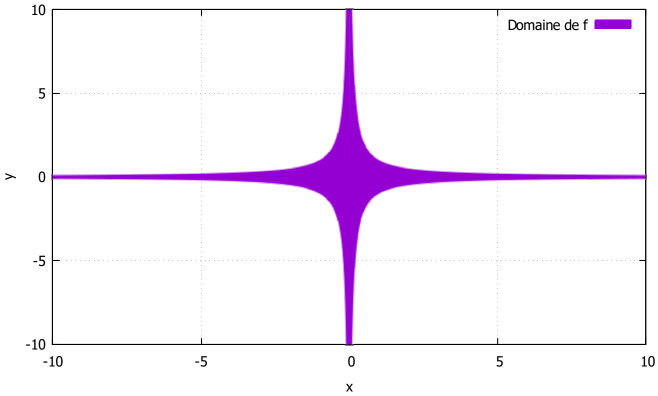
2) Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel $f\colon (x,y) \mapsto \arcsin(xy)$ est définie. Alors D est:

☐ ni fermé, ni borné
☒ fermé, non borné
☐ borné, non fermé
☐ compact

Commentaire : La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$. Le domaine D de définition de f est donc

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 \leq xy \leq 1\right\}$$

D est le domaine représenté ci-dessous.



D est fermé. En effet, sa frontière est l'union des graphiques des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$. Un point (x,y) appartenant à l'un de ces deux graphiques vérifie soit $y = \frac{1}{x}$, soit $y = -\frac{1}{x}$, c'est-à-dire $xy = 1$ ou $xy = -1$. Un tel point (x,y) est donc dans D. Ceci prouve que D contient sa frontière et donc qu'il est fermé.

D est non borné car pour $R \in \mathbb{R}_+^*$ quelconque, le point $(2R, \frac{1}{2R})$ est au-delà de la boule de rayon R centrée à l'origine, mais malgré tout dans D car $2R\frac{1}{2R} = 1$.

3) Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2(x+1)-y^2(y-1)}{x^2+y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Alors:

- ☐ f n'est pas continue en $(0, 0)$.
- ☒ f est continue, non dérivable en $(0, 0)$.
- ☐ f est dérivable, non $\mathscr{C}^1$ en $(0, 0)$.
- ☐ f est $\mathscr{C}^1$ en $(0, 0)$.

Commentaire : Par un changement de variables vers les coordonnées polaires, nous obtenons

$$f(x, y) = \cos^2(\varphi)(r\cos(\varphi) + 1) - \sin^2(\varphi)(r\sin(\varphi) - 1) = r(\cos^3(\varphi) - \sin^3(\varphi)) + 1$$

D'où

$$|f(x, y) - f(0, 0)| = r|\cos^3(\varphi) - \sin^3(\varphi)| \leq \underbrace{2r}_{\underset{r\to 0}{\to 0}}$$

Donc f est continue en $(0, 0)$.

Si f est dérivable en $(0, 0)$, on doit avoir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h, k)\rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

Commençons par vérifier l'existence et calculer les dérivées partielles de f en $(0, 0)$. $\forall t \neq 0$,

$$\frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \frac{\frac{t^2(t+1)}{t^2} - 1}{t} = 1 \underset{t\to 0}{\to} 1$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ existe et vaut 1. De même, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existe et vaut -1. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (h, k)\rangle}{\sqrt{h^2 + k^2}} &= \frac{\frac{h^2(h+1)-k^2(k-1)}{h^2+k^2} - 1 - (h - k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \frac{h^2(h + 1) - k^2(k - 1) - h^2 - k^2 - (h - k)(h^2 + k^2)}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{kh^2 - hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

En particulier pour $(h, k) = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$,

$$\frac{kh^2 - hk^2}{(h^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{2}{n^3}}{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n\to+\infty}{\to} \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

ce qui prouve que f n'est pas dérivable en $(0, 0)$.

4) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \operatorname{arctg}(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

Le plan tangent au graphique de f en $(1, \sqrt{3}, f(1, \sqrt{3}))$ a pour équation:

- ☒ $\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + z = \frac{\pi}{3}$
- ☐ $-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + z = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + z = \frac{\pi}{6}$
- ☐ $-\frac{1}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y + z = \frac{\pi}{3}$

Commentaire : $f(1, \sqrt{3}) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, et les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x}\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2} = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ donc } \frac{\partial f}{\partial x}(1,\sqrt{3}) = \frac{1}{4}$$

L'équation du plan tangent recherché est donc

$$z = \frac{\pi}{3} + \left\langle (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}), (x-1, y-\sqrt{3}) \right\rangle$$

soit encore

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + z = \frac{\pi}{3}$$

5) Soient $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) &\mapsto (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \\ &= (e^{uvw}, u+3v+2w, v^2+w^2) \end{aligned}$$

On pose $\bar{f} = f \circ g$. Alors:

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) + \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$
- ☒ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) - \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) = \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) + \dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = e\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) + 3\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) + 2\dfrac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$

Commentaire : Nous savons que

$$J_{\bar{f}}(u,v,w) = J_f(g(u,v,w))J_g(u,v,w)$$

On commence par calculer la matrice Jacobienne de g:

$$J_g(u,v,w) = \begin{pmatrix} vwe^{uvw} & uwe^{uvw} & uve^{uvw} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2v & 2w \end{pmatrix}$$

La relation entre les Jacobiennes se réécrit donc:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(u,v,w) & \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(u,v,w) & \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(g(u,v,w)) & \frac{\partial f}{\partial y}(g(u,v,w)) & \frac{\partial f}{\partial z}(g(u,v,w)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} vwe^{uvw} & uwe^{uvw} & uve^{uvw} \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2v & 2w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En particulier pour $(u,v,w) = (1,1,1)$, et sachant que $g(1,1,1) = (e,6,2)$,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) & \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) & \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) & \frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) & \frac{\partial f}{\partial z}(e,6,2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & e & e \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

A ce stade, dans un problème ouvert (sans réponse proposée), on inverserait la matrice Jacobienne de g et on obtiendrait les dérivées de f en fonction de celles de $\bar{f}$. Cependant, avec les réponses proposées, nous pouvons écarter immédiatement la première et la dernière qui font intervenir les dérivées partielles de f en un autre point que $(e,6,2)$. En réécrivant l'égalité matricielle précédente, nous obtenons:

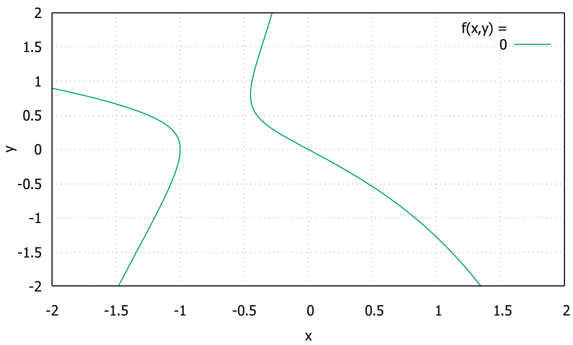
$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u}(1,1,1) &= e\frac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) + \frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) &= e\frac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(e,6,2) \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1) &= e\frac{\partial f}{\partial x}(e,6,2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) + 2\frac{\partial f}{\partial z}(e,6,2) \end{aligned}$$

et nous pouvons voir directement, en soustrayant la troisième ligne à la deuxième, que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(e,6,2) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial v}(1,1,1) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}(1,1,1)$$

sans avoir à inverser la matrice Jacobienne de g.

6) On considère une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ dont la courbe de niveau 0 est représentée ci-dessous.



Soient $p_1 = (-1, 0)$ et $p_2 = (0, 0)$. Alors la courbe de niveau 0 de f définit implicitement, localement, y comme fonction de x:

- ☐ ni en p_1, ni en p_2.
- ☐ en p_1, mais pas en p_2.
- ☒ en p_2, mais pas en p_1.
- ☐ en p_1 et en p_2.

Commentaire : Cette question vise à apprécier la compréhension géométrique que vous avez du théorème des fonctions implicites. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ et $F(p_1) = F(p_2) = 0$ (ce qui traduit simplement le fait que p_1 et p_2 appartiennent à la courbe de niveau 0 de F). La seule hypothèse qu'il reste à vérifier est que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, autrement dit que la tangente à la courbe n'est pas verticale. C'est bien le cas en p_2, mais pas en p_1.

On aurait pu poser la question en donnant l'expression de F, en l'occurrence pour ce graphique $F(x,y) = xe^y + y + x^2$, mais posée ainsi, la question est instructive sur l'approche physique des choses.

7) Soit

$$F(t) = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t^2} \frac{\mathrm{arctg}(tx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Alors $F'(1)$ vaut:

- ☐ $\frac{\pi}{12}$
- ☐ $\frac{\pi}{2}$
- ☐ $\frac{5\pi}{12}$
- ☒ $\frac{7\pi}{12}$

Commentaire : Posons $f(x,t) = \frac{\mathrm{arctg}(tx)}{x}$. Alors

$$\begin{aligned} F'(t) &= 2tf(t^2,t) + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t^2} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x \\ &= 2t\frac{\mathrm{arctg}(t^3)}{t^2} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{t^2} \frac{1}{1+(tx)^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nous sommes capables de calculer l'intégrale, mais la question demande simplement $F'(1)$, donc nous pouvons d'emblée nous simplifier la tâche et prendre $t = 1$.

$$\begin{aligned} F'(1) &= 2\frac{\pi}{4} + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} + [\mathrm{arctg}(x)]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1} \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{7\pi}{12} \end{aligned}$$

3 Questions plus difficiles

Les questions suivantes sont d'un niveau plus relevé que le niveau moyen attendu des questions de l'examen final.

1**) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Alors $f(-1,1) = f(1,-1)$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : Le fait que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ signifie que le gradient, quand il n'est pas nul, est dans la direction décrite par le vecteur directeur $(1,1)$. On peut donc avoir l'intuition que les courbes de niveau de f, qui doivent être orthogonales au gradient, sont les droites de pente -1. En l'occurrence, les points $(-1,1)$ et $(1,-1)$ sont tous les deux sur la droite d'équation $y = -x$, qui est de pente -1. On peut donc avoir l'intuition que cette proposition est vraie.
Nous pouvons confirmer cette intuition par le calcul. Soit

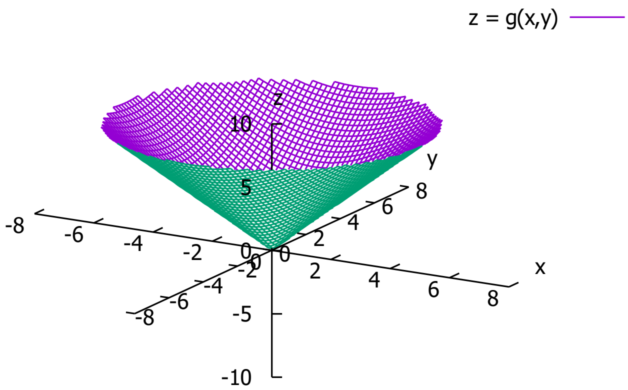
$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(t,-t) \end{aligned}$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,-t) - \frac{\partial f}{\partial y}(t,-t) = 0 \text{ d'après l'hypothèse}$$

Donc g est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. En particulier, $g(-1) = g(1)$, d'où $f(-1,1) = f(1,-1)$.

2*) On considère la fonction $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont le graphique est représenté par la figure ci-dessous. Alors les dérivées partielles de g existent en $(0,0)$.



☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : La fonction est "pointue" en $(0,0)$. Si on coupait ce graphique par le plan xz, on aurait un graphique s'apparentant à une fonction valeur absolue. Cette dernière n'est pas dérivable en 0 car ses dérivées à droite et à gauche ne sont pas égales. Pour les mêmes raisons, g n'a pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$. Il en va de même pour la dérivée partielle en y.

3*) Soit

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \frac{1}{9}\frac{x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6}{\operatorname{tg}(x^2+y^2)-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$

Alors:

- ☐ f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
- ☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 0.
- ☒ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur $\frac{1}{3}$.
- ☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 1.

Commentaire : On reconnaît au numérateur l'identité

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6=(x^2+y^2)^3$$

Ainsi, en posant $r=x^2+y^2$, on a $r \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0$ et le problème revient à déterminer l'existence et, le cas échéant, la valeur de

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{9}\frac{r^3}{\operatorname{tg}(r)-(r)}$$

La solution la plus simple est d'utiliser le développement limité de tg au voisinage de 0:

$$\operatorname{tg}(r)=r+\frac{1}{3}r^3+o_{r\to 0}(r^3)$$

Alors

$$\frac{1}{9}\frac{r^3}{\operatorname{tg}(r)-(r)}=\frac{1}{9}\frac{r^3}{\frac{1}{3}r^3+o(r^3)}\underset{r\to 0}{\to}\frac{1}{3}$$

Si l'on ne connaît pas par cœur le développement limité de tg, on peut également utiliser la règle de Bernouilli-l'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0}\frac{1}{9}\frac{r^3}{\operatorname{tg}(r)-(r)} &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{9}\frac{3r^2}{\operatorname{tg}^2(r)} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{3}\frac{r^2}{\sin^2(r)}\cos^2(r) \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{3}\underbrace{(\frac{r}{\sin(r)})^2}_{\underset{r\to 0}{\to}1}\underbrace{\cos^2(r)}_{\underset{r\to 0}{\to}1}\underset{r\to 0}{\to}\frac{1}{3} \end{aligned}$$

4*) Soit

$$\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto 2\frac{x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6}{x^6 + y^6} \end{aligned}$$

Alors:

- ☒ f n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.
- ☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 0.
- ☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 1.
- ☐ f est prolongeable par continuité en $(0,0)$ avec la valeur 2.

Commentaire : De même que pour la question 3), on peut simplifier le numérateur et étudier l'existence de la limite en $(0,0)$ de

$$f(x,y) = 2\frac{(x^2+y^2)^3}{x^6+y^6}$$

En l'occurrence, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$f(\frac{1}{k}, 0) = 2 \underset{k\to+\infty}{\to} 2$$

Mais

$$f(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) = 2\frac{(\frac{2}{k^2})^3}{\frac{2}{k^6}} = 8 \underset{k\to+\infty}{\to} 8$$