Analyse II
Série d'Entraînement - Equations Différentielles

Kévin Barbieux

March 31, 2021

1 Questions Vrai/Faux

1) On considère le problème de Cauchy :

$$\cos(y)y' = 1$$

avec la condition initiale $y(2) = \frac{\pi}{2}$. Ce problème admet une unique solution maximale.

☐ VRAI ☐ FAUX

2) Soient a, b et $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = q(x)$$

forment un espace vectoriel de dimension 2.

☐ VRAI ☐ FAUX

3) Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation

$$xy' = y \log y \tag{1}$$

Alors $y_3 = y_1 y_2$ est aussi solution de (1).

☐ VRAI ☐ FAUX

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de l'équation

$$f(y)y' = 0$$

ne dépend pas de la fonction $f(y)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de l'équation

$$f(y)y' = 5$$

ne dépend pas de la fonction $f(y)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

6) La fonction

$$\begin{aligned} f \colon]0, \pi[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log \left| \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

est une solution de l'équation

$$y'' \sin(x) + y' \cos(x) = 0$$

☐ VRAI ☐ FAUX

7)* Soit h $\in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si l'équation

$$y' = -(y + h(x)x)^4 e^x$$

est à variables séparées, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX

2 Questions à Choix Multiples

1) Soit v la solution du problème de Cauchy

$$(1 + x^2)y' + e^{\mathrm{Arctg}(x)} y = 0$$

avec la condition initiale $y(0) = e^{-1}$. Alors :

- ☐ $v(1) = 2$
- ☐ $v(\frac{\pi}{4}) = e^{-1}$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} v(x) = e^{-e^{\frac{\pi}{2}}}$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} v'(x) = 1$

2) L'Ansatz pour trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' + y = e^x + \sin(x)$$

par la méthode des coefficients indéterminés est

- ☐ $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$
- ☐ $y(x) = Ae^x + B\sin(x) + Cx\sin(x)$
- ☐ $y(x) = Ax\sin(x) + Bx\cos(x) + Ce^x$
- ☐ $y(x) = (Ax + B)e^x + C\cos(x)$

où A, B, C sont des coefficients inconnus.

3) La solution générale de l'équation différentielle pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y'' + y = e^x + \sin(x)$$

est

- ☐ $y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x\cos(x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$
- ☐ $y(x) = e^x + \frac{1}{2}x\cos(x) + (C_1 + C_2x)\sin(x)$
- ☐ $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + \sin(x)$
- ☐ $y(x) = \frac{1}{2}e^x + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

4)* Soit l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad y'' + 3e^x y' + \operatorname{sh}(x)y = 0$$

et le changement de variables $t = e^x$. Alors (E) se réécrit :

- ☐ $z'' + 3tz' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} z = 0$
- ☐ $z'' + 3tz' + \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2} z = 0$
- ☐ $t^2 z'' + 3t^2 z' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} z = 0$
- ☐ $t^2 z'' + (3t^2 + t) z' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2} z = 0$