Analyse II
Série d'Entraînement - Equations Différentielles

Kévin Barbieux

March 31, 2021

1 Questions Vrai/Faux

1) On considère le problème de Cauchy :

$$\cos(y)y' = 1$$

avec la condition initiale $y(2) = \frac{\pi}{2}$. Ce problème admet une unique solution maximale.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : il s'agit d'une équation différentielle à variables séparées, de la forme $f(y)y' = g(x)$ avec $f(y) = \cos(y)$ et $g(x) = 1$. On sait que l'existence et l'unicité de la solution maximale seraient garanties sur un intervalle où f ne s'annulerait pas. Or, cet intervalle doit contenir $\frac{\pi}{2}$ à cause de la condition initiale, et $f(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$. L'existence et l'unicité d'une solution maximale ne sont donc pas assurées. Ici, au point $x = 2$, nous obtenons $0 \times y' = 1$, ce qui est exclu, donc l'équation n'admet aucune solution.
On peut également procéder en tentant de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned}
&\cos(y)y' = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \text{ tel que } \sin(y) = x + C \\
&\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ tels que } y = \text{Arcsin}(x + C) + 2k\pi \text{ ou } y = \pi - \text{Arcsin}(x + C) + 2k\pi
\end{aligned}$$

Les solution de la forme $\text{Arcsin}(x + C) + 2k\pi$ ont pour image $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$, tandis que celle de la forme $\pi - \text{Arcsin}(x + C) + 2k\pi$ ont pour image $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$. Les deux seules solutions qui peuvent respecter la condition initiale (i.e, dont l'image contient $\frac{\pi}{2}$) sont $y_1 = \text{Arcsin}(x+C_1)$ et $y_2 = \pi - \text{Arcsin}(x+C_2)$. $y_1(2) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 + C_1 = 1 \Leftrightarrow C_1 = -1$. On obtient $y_1 = \text{Arcsin}(x - 1)$, qui n'est pas dérivable en 2 et donc ne peut pas être solution. De même, on obtient $C_2 = -1$ et $y_2 = \pi - \text{Arcsin}(x - 1)$ qui n'est pas dérivable en 2.

2) Soient a, b et $q \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = q(x)$$

forment un espace vectoriel de dimension 2.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : cette affirmation aurait été vraie pour l'équation différentielle homogène associée ($q = 0$). Elle est bien évidemment fausse ici. Exemple : l'ensemble des solutions de $y'' + y = x$ n'est pas un espace vectoriel car 0 n'est pas solution.

3) Soient y_1, y_2 deux solutions de l'équation

$$xy' = y \log y \tag{1}$$

Alors $y_3 = y_1 y_2$ est aussi solution de (1).

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : soient y_1, y_2 deux solutions de cette équation et $y_3 = y_1 y_2$, alors

$$\begin{aligned} xy_3 = x(y_1 y_2)' &= (xy_1')y_2 + (xy_2')y_1 \\ &= (y_1 \log y_1)y_2 + (y_2 \log y_2)y_1 \text{ car } y_1 \text{ et } y_2 \text{ sont solutions de l'équation} \\ &= y_1 y_2(\log y_1 + \log y_2) \\ &= y_1 y_2 \log(y_1 y_2) \\ &= y_3 \log(y_3) \end{aligned}$$

Donc y_3 est bien solution de l'équation.

On peut également remarquer que le changement de variables $z = \log(y)$ transforme cette équation en EDL1 homogène, notamment $xz' - z = 0$ qui a un espace vectoriel (de dimension 1) pour l'ensemble des solutions. Donc si $z_1 = \log(y_1)$ et $z_2 = \log(y_2)$ sont des solutions, alors $z_1 + z_2 = \log(y_1) + \log(y_2) = \log(y_1 y_2)$ l'est aussi.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de l'équation

$$f(y)y' = 0$$

ne dépend pas de la fonction $f(y)$.

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : comme f ne s'annule jamais, $f(y)y' = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ tel que $y = C$. La fonction y est une constante, quelle que soit la fonction f.

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et telle que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors la solution générale de l'équation

$$f(y)y' = 5$$

ne dépend pas de la fonction $f(y)$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : on peut prendre deux cas très simples pour s'en convaincre. Pour $f(x) = 1$, nous obtenons $y' = 5$, soit $y = 5x + C$. Pour $f(x) = \frac{1}{2}$, nous obtenons $y' = 10$, soit $y = 10x + C$.

6) La fonction

$$\begin{aligned} f : \,]0, \pi[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

est une solution de l'équation

$$y'' \sin(x) + y' \cos(x) = 0$$

☒ VRAI ☐ FAUX

Commentaire : sur l'intervalle de définition de f, $\text{tg}(\frac{x}{2})$ est positive, donc nous pouvons enlever la valeur aboslue. Alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}}{\text{tg}(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Donc

$$f''(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

Nous avons donc $f''(x)\sin(x) + f'(x)\cos(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\sin(x) + \frac{1}{\sin x}\cos(x) = 0$.

7)* Soit h $\in C^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Si l'équation

$$y' = -(y + h(x)x)^4 \log^2 e^x$$

est à variables séparées, alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = 0$.

☐ VRAI ☒ FAUX

Commentaire : il suffirait, pour que les variables soient séparées, que $(y + h(x)x)^4$ ne dépende pas de x, auquel cas nous pourrions diviser les deux côtés de l'égalité par ce terme. Ceci est certes possible quand $h(x) = 0$, mais aussi quand $h(x) = \frac{C}{x}$ pour $C \in \mathbb{R}$. Nous obtenons alors

$$\frac{y'}{(y + C)^4} = e^x$$

2 Questions à Choix Multiples

1) Soit v la solution du problème de Cauchy

$$(1 + x^2)y' + e^{\text{Arctg}(x)}y = 0$$

avec la condition initiale $y(0) = e^{-1}$. Alors :

☐ $v(1) = 2$

☐ $v(\frac{\pi}{4}) = e^{-1}$

☒ $\lim_{x\to+\infty} v(x) = e^{-e^{\frac{\pi}{2}}}$

☐ $\lim_{x\to+\infty} v'(x) = 1$

Commentaire : il s'agit d'une équation à variables séparables :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+x^2}e^{\text{Arctg}(x)}$$

$\frac{1}{1+x^2}$ étant la dérivée de $\text{Arctg}(x)$, nous pouvons intégrer :

$$\log|y| = -e^{\text{Arctg}(x)} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

donc

$$|y| = C_2 e^{-e^{\text{Arctg}(x)}}, \qquad C_2 = e^{C_1} \in \mathbb{R}_+^*$$

soit encore

$$y = C_3 e^{-e^{\text{Arctg}(x)}}, \qquad C_3 = \pm C_2 \in \mathbb{R} \text{ (on inclut la possibilité } C_3 = 0 \text{ car 0 est solution)}$$

La condition $y(0) = e^{-1}$ donne $C_3 = 1$ donc la solution est

$$v(x) = e^{-e^{\text{Arctg}(x)}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

Par conséquent,

$$v(1) = e^{-e^{\frac{\pi}{4}}}$$
$$v(\frac{\pi}{4}) = e^{-e^{\text{Arctg}(\frac{\pi}{4})}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} v(x) = e^{-e^{\frac{\pi}{2}}}$$
$$\lim_{x\to+\infty} v'(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{-\frac{1}{1+x^2}}_{\underset{x\to+\infty}{\to 0}} \underbrace{e^{\text{Arctg}(x)}v(x)}_{\text{a une limite finie à l'infini}} = 0$$

2) L'Ansatz pour trouver une solution particulière de l'équation

$$y'' + y = e^x + \sin(x)$$

par la méthode des coefficients indéterminés est

$\square$ $y(x) = A\sin(x) + B\cos(x)$
$\square$ $y(x) = Ae^x + B\sin(x) + Cx\sin(x)$
$\boxtimes$ $y(x) = Ax\sin(x) + Bx\cos(x) + Ce^x$
$\square$ $y(x) = (Ax + B)e^x + C\cos(x)$

où A, B, C sont des coefficients inconnus.

Commentaire : le polynôme caractéristique associé est $\lambda^2 + 1$, qui a pour racines i et -i. En utilisant le principe de superposition des solutions, pour e^x on a $\mu = 1$ n'est pas solution de l'équation caractéristique et donc l'ansatz pour cette partie est $y_{p_1} = Ce^x$. La fonction $\sin(x)$ donne $\mu = \pm i = a \pm ib$ qui est quant à lui solution de l'équation caractéristique avec multiplicité 1. Alors l'ansatz pour cette partie est $y_{p_2} = xe^{ax}(S_N(x)\sin(bx) + T_N(x)\cos(bx))$ avec $N = 0$, $a = 0$ et $b = 1$. Donc S et T sont des constantes que nous renommons A et B, et $y_{p_2} = x(A\sin(x)+B\cos(x))$. L'Ansatz est donc $y_{p_1}+y_{p_2} = Ax\sin(x)+Bx\cos(x)+Ce^x$.

3) La solution générale de l'équation différentielle pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$y'' + y = e^x + \sin(x)$$

est

$\boxtimes$ $y(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x\cos(x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$
$\square$ $y(x) = e^x + \frac{1}{2}x\cos(x) + (C_1 + C_2x)\sin(x)$
$\square$ $y(x) = (C_1 + C_2x)e^x + \sin(x)$
$\square$ $y(x) = \frac{1}{2}e^x + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$

où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Commentaire : nous avons vu à la question précédente que les racines du polynôme caractéristique de l'équation homogène associée sont i et -i. La solution générale de l'équation homogène est donc $y_{\text{hom}} = C_1\sin(x)+C_2\cos(x)$. Pour la solution particulière, on utilise l'Ansatz de la question précédente. En gardant les mêmes notations et toujours en raisonnant par superposition, $y_{p_1} = Ce^x$, donc $y''_{p_1} + y_{p_1} = 2Ce^x$, ce qui impose $2C = 1$ donc $C = \frac{1}{2}$.
$y_{p_2} = Ax\sin(x) + Bx\cos(x)$ donc $y'_{p_2} = (A - Bx)\sin(x) + (B + Ax)\cos(x)$ et $y''_{p_2} = -(2B + Ax)\sin(x) + (2A - Bx)\cos(x)$. Il s'en suit que

$$\begin{aligned} y''_{p_2} + y_{p_2} &= -(2B + Ax)\sin(x) + (2A - Bx)\cos(x) + Ax\sin(x) + Bx\cos(x) \\ &= -2B\sin(x) + 2A\cos(x) \end{aligned}$$

Cette expression devant être égale à $\sin(x)$, il faut donc que $A = 0$ et $B = -\frac{1}{2}$. La solution particulière est donc $y_p = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x\cos(x)$. La solution générale est donc $y_p + y_{\text{hom}} = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}x\cos(x) + C_1\sin(x) + C_2\cos(x)$.

4)* Soit l'équation différentielle

$$\text{(E) } y'' + 3e^x y' + \text{sh}(x)y = 0$$

et le changement de variables $t = e^x$. Alors (E) se réécrit :

☐ $z'' + 3tz' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2}z = 0$

☐ $z'' + 3tz' + \dfrac{t + \frac{1}{t}}{2}z = 0$

☐ $t^2 z'' + 3t^2 z' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2}z = 0$

☒ $t^2 z'' + (3t^2 + t)z' + \dfrac{t - \frac{1}{t}}{2}z = 0$

Commentaire : posons $z(t) = y(x(t))$, où $x(t) = \log(t)$ est le changement de variable inverse (avec une notation légèrement abusive). Alors $y(x) = z(t(x))$ avec $t(x) = e^x$, d'où

$$\begin{aligned} y'(x) &= t'(x)z'(t(x)) \\ &= e^x z'(t(x)) \\ &= tz'(t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y''(x) &= e^x z'(t(x)) + e^x(t'(x)z''(t(x))) \\ &= e^x z'(t(x)) + e^{2x} z''(t(x))) \\ &= tz'(t) + t^2 z''(t) \end{aligned}$$

En substituant ces termes dans l'équation et en se rappelant que $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, nous obtenons

$$tz'(t) + t^2 z''(t) + 3t(tz'(t)) + \frac{t - \frac{1}{t}}{2}z(t) = 0$$

soit encore

$$t^2 z''(t) + (3t^2 + t)z'(t) + \frac{t - \frac{1}{t}}{2}z(t) = 0$$