Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soit une famille de propositions $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+4)$ est vraie. Alors:

- ☐ Si $P(2)$ est fausse, alors $P(10)$ est fausse
- ☐ Si $P(6)$ est vraie, alors $P(12)$ est vraie
- ☐ Si $P(25)$ est vraie, alors $P(5)$ est vraie
- ☐ Si $P(19)$ est fausse, alors $P(7)$ est fausse

Troisième partie, questions de type ouvert

– Répondre dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
– Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.
– Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 2 : *Cette question est notée sur 7 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ■ 7 *Réservé au correcteur*

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et $v_1, v_2 : I \to \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation différentielle

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

(a) Donner la définition de dépendance linéaire des deux solutions v_1 et v_2.

(b) Le wronskien $W[v_1, v_2] : I \to \mathbb{R}$ des fonctions v_1, v_2 est donné par

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix}.$$

Démontrer que si v_1 et v_2 sont linéairement dépendantes, alors $W[v_1, v_2](x) = 0$ pour tout $x \in I$.

(c) Démontrer que s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x_0) = 0$, alors les deux solutions v_1 et v_2 sont linéairement dépendantes.

Question 3 : *Cette question est notée sur 6 points.*

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ■ 6 *Réservé au correcteur*

Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre naturel. On considère les deux propositions suivantes:

P: Le reste de la division de n par 5 est égal à 2 ou 3.
Q: Le nombre n n'est pas le carré d'un nombre naturel.

(a) Écrire la proposition $P \implies Q$ et sa contraposée.

(b) Citer la méthode de démonstration par contraposée.

(c) Démontrer la proposition $P \implies Q$ par contraposée.